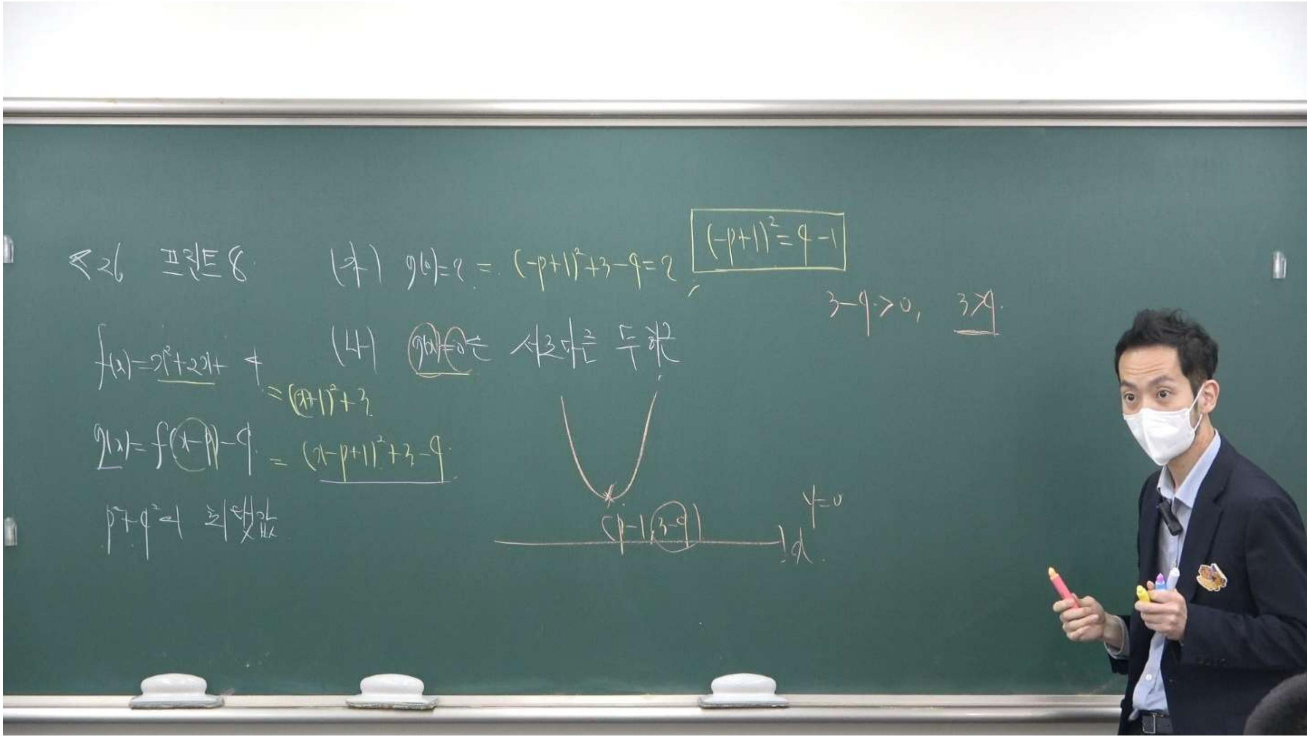
#210628 #고1 #수상 #여러 가지 방정식~도형의 이동

#1-8총정리

final

ZIO MATH



저자 정지호

온라인 수업 문의 01075132362

월계고2　 권00 3개월만에 4등급 -> 1등급
서라벌고3 하00 1개월만에 3등급 -> 1등급
영신여고2 김00 6개월만에 4등급 -> 1등급
혜성여고2 이00 8개월만에 4등급 -> 1등급
등 다수사례보유

1. 삼차방정식의 세 근α, β, γ

$ax^3+bx^2+cx+d=0$

$\Leftrightarrow\ a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$

ex1) $x^3+3x^2+4x-8=0$의 세 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$라 할 때, $(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)$의 값을 구하여라.

풀이] 0

$x^3+3x^2+4x-8=0$

$\Leftrightarrow\ 1(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)=0$

$x=1$대입

$1^3+3\cdot 1^2+4\cdot 1-8=(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$

$0=-(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)$

$0=(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)$

2. $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 근과 계수의 관계

① $\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}$

② $\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma=\dfrac{c}{a}$

③ $\alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}$

3. 켤레근

ex2) $ax^3+bx^2+cx+d=0(a,b,c,d$가 실수)

$1+2i$가 근 => $1-2i$도 근

$\Rightarrow$ 인수로 x^2-2x+5를 가진다.

※ 만약 a,b,c가 복소수라면 성립하지 않는다.

ex3) $ax^3+bx^2+cx+d=0(a,b,c,d$가 유리수)

$1+\sqrt{2}$가 근 => $1-\sqrt{2}$도 근

$\Rightarrow$ 인수로 x^2-2x-1를 가진다.

※ 만약 a,b,c가 실수라면 성립하지 않는다.

4. $x^3=1$의 한 허근을 w

① $w^3=1$

② $\overline{w}^3=1$

③ $w^2+w+1=0$

④ $\overline{w}^2+\overline{w}+1=0$

⑤ $w+\overline{w}=-1$

⑥ $w\overline{w}=1$

5. $x^3=-1$의 한 허근을 w

① $w^3=-1$

② $\overline{w}^3=-1$

③ $w^2-w+1=0$

④ $\overline{w}^2-\overline{w}+1=0$

⑤ $w+\overline{w}=1$

⑥ $w\overline{w}=1$

6. 연립방정식

① 두 방정식의 공통의 해를 찾는다.

② 문자의 개수와 식의 개수가 일치할 때, 숫자인 해를 구할 수 있다.

ex4) $\begin{cases} x-y+z=3 \\ 3x+2y-z=2 \\ 2x+y+z=-1 \end{cases}$ 를 풀어라.

풀이] $x=2,\quad y=-3,\quad z=-2$

ex5) $\begin{cases} x-y+z=3 \\ \\ 2x+y+z=-1 \end{cases}$ 를 풀어라.

풀이] $x=\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{3}z$

한 문자를 다른 한 문자로 표현은 가능하다. 하지만 해를 숫자로 구할 수 있다.

1. 삼차방정식의 세 근α, β, γ

$ax^3+bx^2+cx+d=0$

⇔ ____________________________

ex1) $x^3+3x^2+4x-8=0$의 세 근을 α, β, γ라 할 때, $(\alpha-1)(\beta-1)(\gamma-1)$의 값을 구하여라.

2. $ax^3+bx^2+cx+d=0$ 근과 계수의 관계

① $\alpha+\beta+\gamma=$____

② $\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma=$_____

③ $\alpha\beta\gamma=$_____

3. 켤레근

ex2) $ax^3+bx^2+cx+d=0(a, b, c, d$가 실수)

$1+2i$가 근 => _______도 근

⇒ 인수로 _______________를 가진다.

※ 만약 a, b, c가 복소수라면 성립하지 않는다.

ex3) $ax^3+bx^2+cx+d=0(a, b, c, d$가 유리수)

$1+\sqrt{2}$가 근 => ________도 근

⇒ 인수로________________를 가진다.

※ 만약 a, b, c가 실수라면 성립하지 않는다.

4. $x^3=1$의 한 허근을 w

①

②

③

④

⑤

⑥

5. $x^3=-1$의 한 허근을 w

①

②

③

④

⑤

⑥

6. 연립방정식

① 두 방정식의 _________의 해를 찾는다.

② _____의 개수와 __의 개수가 일치할 때, 숫자인 해를 구할 수 있다.

ex4) $\begin{cases} x-y+z=3 \\ 3x+2y-z=2 \\ 2x+y+z=-1 \end{cases}$ 를 풀어라.

풀이]

ex5) $\begin{cases} x-y+z=3 \\ \\ 2x+y+z=-1 \end{cases}$ 를 풀어라.

풀이] $x=$____________

한 문자를 다른 한 문자로 표현은 가능하다. 하지만 해를 숫자로 구할 수 있다.

1. 부등식의 해, 근 => x범위

2. 대소비교 : '차'를 통해서 주로 비교한다.

ex1) $0 < a < b$이면 $3b^2 > a^2 + 2ab$를 밝히세요.
풀이]
$3b^2 - (a^2 + 2ab) = 3b^2 - 2ab - a^2 = (3b + a)(b - a) > 0$
$3b^2 > a^2 + 2ab$

3. 절댓값 부등식(예제2개 추가)

ex2) 부등식 $|x| < a\ (a > 0)$을 풀어라.
풀이]
$-a < x < a$

ex3) 부등식 $|x| \geq a\ (a > 0)$을 풀어라.
풀이]
$-a > x$ or $a < x$

ex4) $2|x-1| < x$

풀이]
(ⅰ) $x \geq 1$일 때, $2(x-1) < x \quad \therefore\ x < 2$
그런데 $x \geq 1$이므로 $1 \leq x < 2$
(ⅱ) $x < 1$일 때, $-2(x-1) < x$, $-3x < -2$
$\therefore\ x > \frac{2}{3}$
그런데 $x < 1$이므로 $\frac{2}{3} < x < 1$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $\frac{2}{3} < x < 2$

※ 기본적으로 (ⅰ), (ⅱ)는 공통된 범위가 없다. 왜냐하면 $x \geq 1$, $x < 1$이기 때문이다. 하지만 둘 다 답이 되기 때문에 (ⅰ)의 답도 답이 되고, (ⅱ)의 답도 답이 된다. 따라서 둘 다 답으로 적어야 한다. $\frac{2}{3} < x < 1$ 또는 $1 \leq x < 2$이 정답이다. 하지만 수학적으로 '$\frac{2}{3} < x < 1$ 또는 $1 \leq x < 2$'이나 $\frac{2}{3} < x < 2$이나 같은 정답이다. 그러므로 굳이 따로 전자처럼 쓸 필요가 없는 것이다. 그래서 학교 서술형에도 후자처럼 써야한다.

ex5) 부등식 $2|x-1| + 3|x+1| < 9$을 풀어라.
풀이]
부등식 $2|x-1| + 3|x+1| < 9$에서
(ⅰ) $x < -1$일 때
$-2(x-1) - 3(x+1) < 9$, $-2x + 2 - 3x - 3 < 9$
$-5x < 10 \qquad \therefore\ x > -2$
그런데 $x < -1$이므로 $-2 < x < -1$
(ⅱ) $-1 \leq x < 1$일 때
$-2(x-1) + 3(x+1) < 9$, $-2x + 2 + 3x + 3 < 9$
$\therefore\ x < 4$
그런데 $-1 \leq x < 1$이므로 $-1 \leq x < 1$
(ⅲ) $x \geq 1$일 때
$2(x-1) + 3(x+1) < 9$, $2x - 2 + 3x + 3 < 9$
$5x < 8 \qquad \therefore\ x < \frac{8}{5}$
그런데 $x \geq 1$이므로 $1 \leq x < \frac{8}{5}$
이상에서 주어진 부등식의 해는 $-2 < x < \frac{8}{5}$

ex6) 부등식 $1<|2x+1|<6$을 풀어라.

풀이]

$1<|2x+1|<6$에서

$1<2x+1<6$또는 $-6<2x+1<-1$

(ⅰ) $1<2x+1<6$에서 $0<2x<5$ $\therefore\ 0<x<\frac{5}{2}$

(ⅱ) $-6<2x+1<-1$에서 $-7<2x<-2$

$\therefore -\frac{7}{2}<x<-1$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $-\frac{7}{2}<x<-1$또는$0<x<\frac{5}{2}$

4. 식의 변형 : 식을 변형해도 해는 바뀌지 않는다.

$2x^2+5x\le 0$의 해 = $2x^2+3x\le -2x$의 해

5. 함수와 부등식과의 관계

부등식$x^2-2x+1<x+5$의 실근

$\Rightarrow$ $y=x^2-2x+1$가 $y=x+5$보다 아래에 놓여있는 x범위

6. 보통의 해$(a>0)$

① $a(x-\alpha)(x-\beta)<0 \Rightarrow \alpha<x<\beta$

② $a(x-\alpha)(x-\beta)>0 \Rightarrow x<\alpha$ 또는 $\beta<x$

ex7) $x^2-3x+2<0$

풀이]

$x^2-3x+2<0$에서 $(x-1)(x-2)<0$

$\therefore 1<x<2$

ex8) $x^2+2x-8\ge 0$

풀이]

$x^2+2x-8\ge 0$에서 $(x+4)(x-2)\ge 0$

$\therefore x\le -4$ 또는 $x\ge 2$

7. 특수한 해

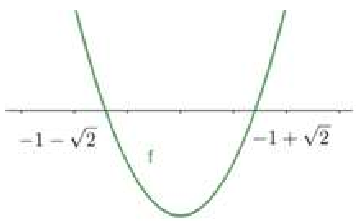
① 실근을 가지면 인수분해

② 허근을 가지면 완전제곱식

ex9) $x^2+2x-1\leqq 0$

풀이]

$x^2+2x-1\leqq 0$에서 $(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})\leqq 0$

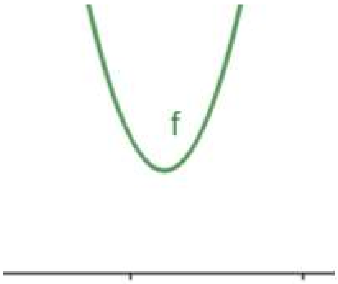


$-1-\sqrt{2}\leqq x\leqq -1+\sqrt{2}$

ex10) $x^2-2x+4<0$

풀이]

$x^2-2x+4=(x-1)^2+3 \geq 3$



따라서 $x^2-2x+4<0$의 해는 없다.

※ 빨리 풀기

ⅰ) 우선 판별식으로 실근인지 허근인지 판단.

ⅱ) 작다는 안쪽으로 암기한다.$(a>0)$

$a(x-\alpha)(x-\beta)<0 \Rightarrow \alpha<x<\beta$

8. 연립부등식: 공통의 범위

ex11) $5x-3 \leq x^2+3<2x+11$

풀이]

$5x-3 \leq x^2+3$에서

$x^2-5x+6 \geq 0$, $(x-2)(x-3) \geq 0$

$\therefore x \leq 2$ 또는 $x \geq 3$ …… ㉠

$x^2+3<2x+11$에서

$x^2-2x-8<0$, $(x+2)(x-4)<0$

$\therefore -2<x<4$ …… ㉡

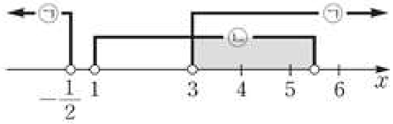
㉠, ㉡의 공통 범위를 구하면

$-2<x \leq 2$ 또는 $3 \leq x<4$

9. 공통 범위구하기

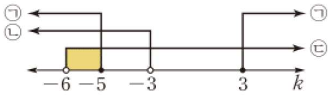
ex12) ㉠ $x<-\frac{1}{2}$ 또는 $x>3$ ㉡ $1<x<\frac{11}{2}$

풀이] $3<x<5.5$



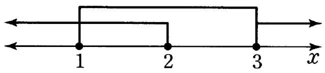
ex13) ㉠ $k \leq -5$ 또는 $k \geq 3$ ㉡ $k<-3$ ㉢ $k>-6$

풀이] $-6<k \leq -5$



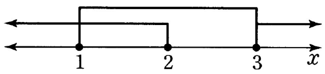
ex14) ㉠ $x \leq 2$ 또는 $3 \leq x$ ㉡ $1 \leq x \leq 3$

풀이] $1 \leq x \leq 2$ 또는 $x=3$



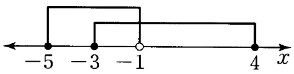
ex15) ㉠ $x \leq 2$ 또는 $3 \leq x$ ㉡ $1 \leq x<3$

풀이] $1 \leq x \leq 2$



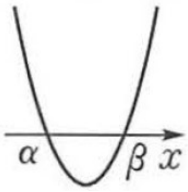
ex16) $\{x \mid -5 \leq x<-1\}-\{x \mid -3 \leq x \leq 4\}$

풀이] $-5 \leq x<-3$



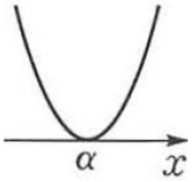
10. $y=ax^2+bx+c$와 x축$(y=0)$과의 관계

①



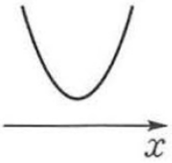
$a>0$, $D>0$

②



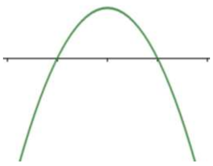
$a>0$, $D=0$

③



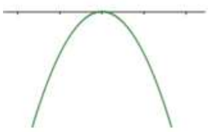
$a>0$, $D<0$

④



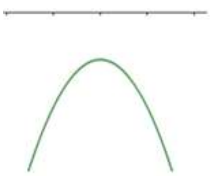
$a<0$, $D>0$

⑤



$a<0$, $D=0$

⑥



$a<0$, $D<0$

※ 절대 암기하는 것이 아니라, 이해해서 적용해야한다.

11. 케이스에 따른 해 구하기

ex17) 이차부등식 $ax^2+2x+a>0$이 해를 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위는?(단, $a\neq 0$)

풀이]

(ⅰ) $a>0$일 때

이차함수 $y=ax^2+2x+a$의 그래프는 아래로 볼록하므로 주어진 이차부등식은 항상 해를 갖는다.

(ⅱ) $a<0$일 때

주어진 이차부등식이 해를 가지려면 이차방정식 $ax^2+2x+a=0$이 서로 다른 두 실근을 가져야 하므로 이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\frac{D}{4}=1^2-a\cdot a>0$, $a^2-1<0$

$(a+1)(a-1)<0$ $\quad \therefore -1<a<1$

그런데 $a<0$이므로 $-1<a<0$

(ⅰ), (ⅱ)에서 구하는 a의 값의 범위는

$a>0$ 또는 $-1<a<0$

※ 기본적으로 (ⅰ), (ⅱ)는 공통된 범위가 없다. 왜냐하면 $a>0$, $a<0$이기 때문이다. 하지만 둘 다 답이 되기 때문에 (ⅰ)의 답도 답이 되고, (ⅱ)의 답도 답이 된다. 따라서 둘 다 답으로 적어야 한다.

1. 부등식의 해, 근 => ____범위

2. 대소비교 : '__'를 통해서 주로 비교한다.

ex1) $0 < a < b$이면 $3b^2 > a^2 + 2ab$를 밝히세요.
풀이]

3. 절댓값 부등식(예제2개 추가)

ex2) 부등식 $|x| < a\ (a > 0)$을 풀어라.
풀이]

ex3) 부등식 $|x| \geq a\ (a > 0)$을 풀어라.
풀이]

ex4) $2|x-1| < x$

풀이]

※ 기본적으로 (i), (ii)는 공통된 범위가 없다. 왜냐하면 $x \geq 1$, $x < 1$이기 때문이다. 하지만 둘 다 답이 되기 때문에 (i)의 답도 답이 되고, (ii)의 답도 답이 된다. 따라서 둘 다 답으로 적어야 한다. $\frac{2}{3} < x < 1$ 또는 $1 \leq x < 2$이 정답이다. 하지만 수학적으로 '$\frac{2}{3} < x < 1$ 또는 $1 \leq x < 2$'이나 $\frac{2}{3} < x < 2$이나 같은 정답이다. 그러므로 굳이 따로 전자처럼 쓸 필요가 없는 것이다. 그래서 학교 서술형에도 후자처럼 써야한다.

ex5) 부등식 $2|x-1| + 3|x+1| < 9$을 풀어라.
풀이]

ex6) 부등식 $1 < |2x+1| < 6$을 풀어라.
풀이]

4. 식의 변형 : 식을 변형해도 해는 ______________
$2x^2+5x \leq 0$의 해 = $2x^2+3x \leq -2x$의 해

5. 함수와 부등식과의 관계
부등식$x^2-2x+1 < x+5$의 실근
$\Rightarrow$ $y=x^2-2x+1$가 $y=x+5$보다 아래에 놓여있는 ______

6. 보통의 해$(a>0)$
① $ax^2+bx+c<0$ $\Rightarrow$ ________________
② $ax^2+bx+c>0$ $\Rightarrow$ ________________

ex7) $x^2-3x+2<0$
풀이]

ex8) $x^2+2x-8 \geq 0$
풀이]

7. 특수한 해
① 실근을 가지면 인수분해
② 허근을 가지면 완전제곱식

ex9) $x^2+2x-1 \leqq 0$
풀이]

ex10) $x^2-2x+4<0$
풀이]

※ 빨리 풀기
ⅰ) 우선 판별식으로 ____인지 ____인지 판단.

ⅱ) 작다는 안쪽으로 암기한다.(a___0)
$a(x-\alpha)(x-\beta)<0 \Rightarrow$ ____________

8. 연립부등식: _____의 범위
ex11) $5x-3 \le x^2+3 < 2x+11$
풀이]

9. 공통 범위구하기
ex12) ㉠ $x<-\frac{1}{2}$ 또는 $x>3$ ㉡ $1<x<\frac{11}{2}$
풀이]

ex13) ㉠ $k \le -5$ 또는 $k \ge 3$ ㉡ $k < -3$ ㉢ $k > -6$
풀이]

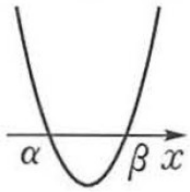
ex14) ㉠ $x \le 2$ 또는 $3 \le x$ ㉡ $1 \le x \le 3$
풀이]

ex15) ㉠ $x \le 2$ 또는 $3 \le x$ ㉡ $1 \le x < 3$
풀이]

ex16) $\{x|-5 \le x < -1\} - \{x|-3 \le x \le 4\}$
풀이]

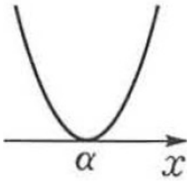
10. $y=ax^2+bx+c$와 x축$(y=0)$과의 관계

①



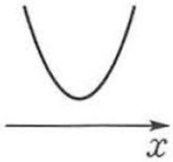
____

②



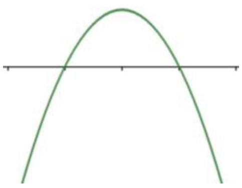
____

③



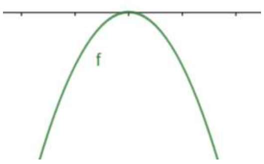
____

④



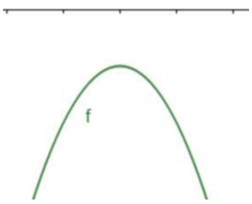
____

⑤



____

⑥



____

※ 절대 암기하는 것이 아니라, 이해해서 적용해야한다.

11. 케이스에 따른 해 구하기

ex17) 이차부등식 $ax^2+2x+a>0$이 해를 갖도록 하는 실수 a의 값의 범위는?(단, $a\neq 0$)

풀이]

※ 기본적으로 (i), (ii)는 공통된 범위가 없다. 왜냐하면 $a>0$, $a<0$이기 때문이다. 하지만 둘 다 답이 되기 때문에 (i)의 답도 답이 되고, (ii)의 답도 답이 된다. 따라서 둘 다 답으로 적어야 한다.

1. 거리

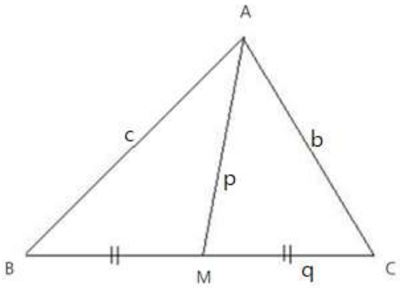
x_1, x_2사이의 거리: $|x_1-x_2|$ = $|x_2-x_1|$

(x_1, y_1), (x_2, y_2)사이의 거리: $\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

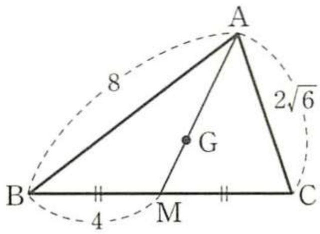
2. 정리

① 파푸스의 중선정리

$b^2+c^2=2(p^2+q^2)$



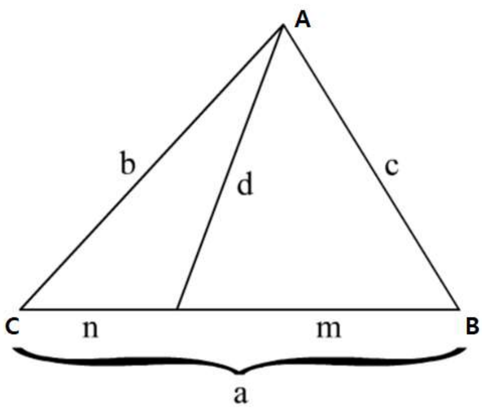
ex1) 오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABC에서 점 M은 변 BC의 중점이다. $\overline{\mathrm{AM}}$의 길이를 구하여라.



풀이] 파푸스 중점 연결정리에 의해 $2\sqrt{7}$

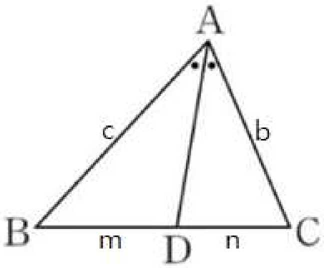
② 스튜어트 정리

$mb^2+nc^2=a(d^2+mn)$



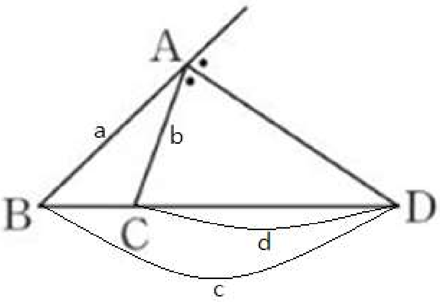
③ 내각의 이등분선의 정리

$c:b=m:n$

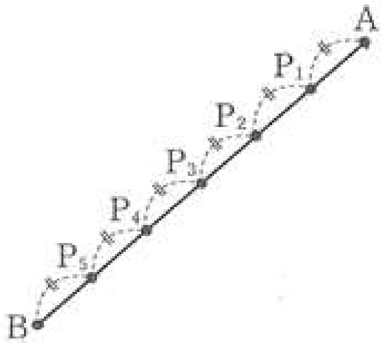


④ 외각의 이등분선의 정리

$a:b=c:d$



3. 내분점과 외분점



① B와 A를 1:5로 내분하는 내분점: P_5

② B와 A를 1:2로 내분하는 내분점: P_4

③ A와 B를 1:2로 내분하는 내분점: P_2

④ A와 B를 1:1로 내분하는 내분점(중점): P_3

⑤ P_4와 P_3를 1:2로 외분하는 외분점: P_5

⑥ P_3와 P_4를 2:3로 외분하는 외분점: P_1

⑦ P_3와 P_5를 1:2로 외분하는 외분점: P_1

⑧ P_4와 P_2를 2:1로 외분하는 외분점: A

ex2) $\mathrm{A}(5,\ 2)$, $\mathrm{B}(3,\ -6)$를 $5:3$으로 내분하는 점 P의 좌표

풀이] $\overline{\mathrm{AB}}$를 $5:3$으로 내분하는 점 P의 좌표

$$\frac{5\cdot3+3\cdot5}{5+3}=\frac{15}{4},\ \frac{5\cdot(-6)+3\cdot2}{5+3}=-3,\ \mathrm{P}\left(\frac{15}{4},\ -3\right)$$

ex3) $\mathrm{A}(5,\ 2)$, $\mathrm{B}(3,\ -6)$를 $2:1$으로 외분하는 점 Q의 좌표

풀이] $\overline{\mathrm{AB}}$를 $2:1$으로 외분하는 점 Q의 좌표

$$\frac{2\cdot3-1\cdot5}{2-1}=1,\ \frac{2\cdot(-6)-1\cdot2}{2-1}=-14,\ \mathrm{Q}(1,\ -14)$$

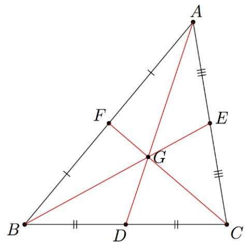
ex4) $\mathrm{A}(5,\ 2)$, $\mathrm{B}(3,\ -6)$의 중점 M의 좌표

풀이] $\mathrm{M}(4,\ -2)$

$$\frac{5+3}{2}=4,\ \frac{2-6}{2}=-2\quad\therefore \mathrm{M}(4,\ -2)$$

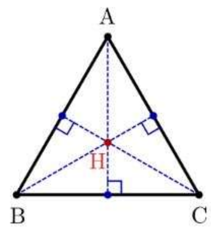
4. 오심

1] 무게중심



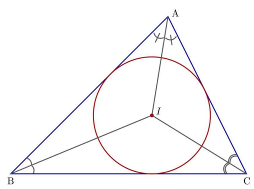
① 세 중선의 교점
② 꼭짓점으로부터 2:1의 길이비를 이룬다.
③ 6개 삼각형의 넓이는 같다.
④ $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$
⑤ $\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2+\overline{\mathrm{PC}}^2$이 최소가 되는 점 P가 무게중심

2] 수심



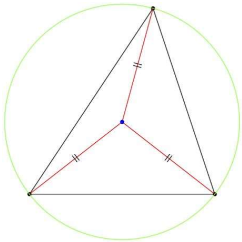
① 꼭짓점에서 각 변으로 내린 수선의 교점

3] 내심



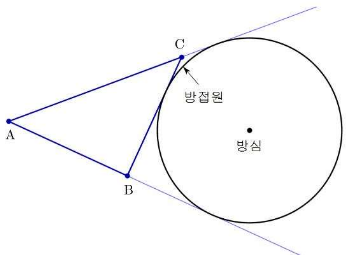
① 각의 이등분선의 교점
② 내접원의 중심
③ 각 변에 내린 수선의 발의 길이가 모두 같다.

4] 외심



① 세 변의 수직이등분선의 교점
② 외접원의 중심
③ 꼭짓점에서 외심까지의 길이가 모두 같다.

5] 방심
삼각형의 외부에 있으면서 삼각형의 한 변과 다른 두 변의 연장선과 접하는 원을 그 삼각형의 방접원이라고 한다.
방접원의 중심.



5. 자취(점의 흔적)문제 TIP
구하고자하는 점을 (x, y), 이용하는 점을 (a, b)로 둔다.

1. 거리

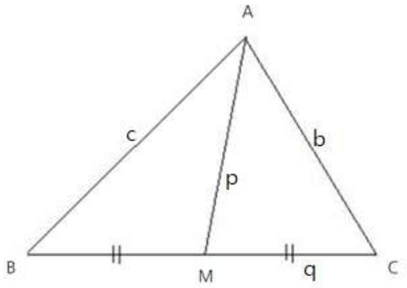
x_1, x_2사이의 거리: _________ = ___________

$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$사이의 거리: ______________________

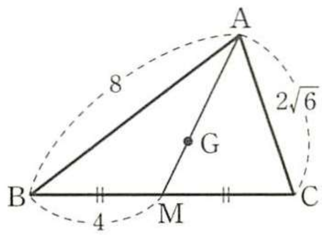
2. 정리

① 파푸스의 중선정리

____



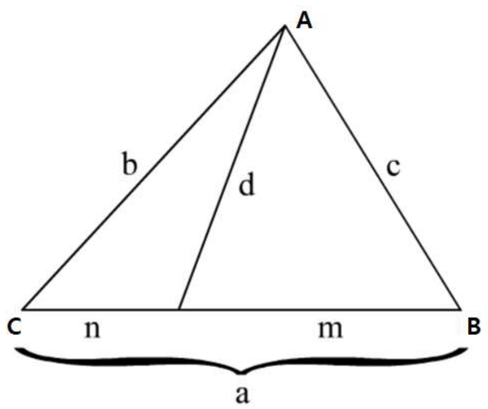
ex1) 오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABC에서 점 M은 변 BC의 중점이다. $\overline{\mathrm{AM}}$의 길이를 구하여라.



풀이] ____________________________

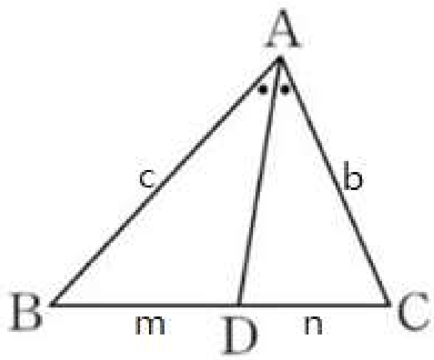
② 스튜어트 정리

____



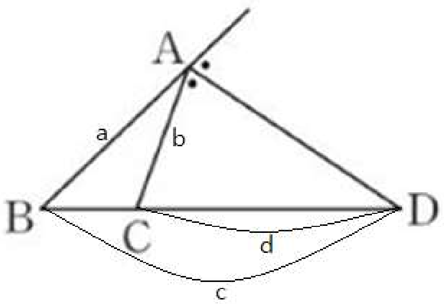
③ 내각의 이등분선의 정리

____

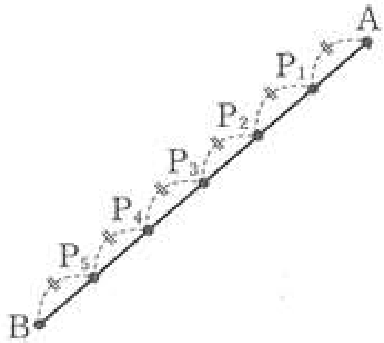


④ 외각의 이등분선의 정리

____



3. 내분점과 외분점



① B와 A를 1:5로 내분하는 내분점: __

② B와 A를 1:2로 내분하는 내분점: __

③ A와 B를 1:2로 내분하는 내분점: __

④ A와 B를 1:1로 내분하는 내분점(중점): __

⑤ P_4와 P_3를 1:2로 외분하는 외분점: __

⑥ P_3와 P_4를 2:3로 외분하는 외분점: __

⑦ P_3와 P_5를 1:2로 외분하는 외분점: __

⑧ P_4와 P_2를 2:1로 외분하는 외분점: __

ex2) $\mathrm{A}(5,\ 2)$, $\mathrm{B}(3,\ -6)$를 $5:3$으로 내분하는 점 P의 좌표

풀이]

ex3) $\mathrm{A}(5,\ 2)$, $\mathrm{B}(3,\ -6)$를 $2:1$으로 외분하는 점 Q의 좌표

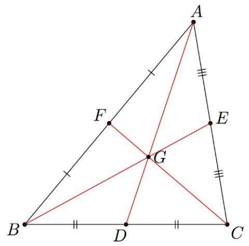
풀이]

ex4) $\mathrm{A}(5,\ 2)$, $\mathrm{B}(3,\ -6)$의 중점 M의 좌표

풀이]

4. 오심

1] 무게중심



① _______의 교점

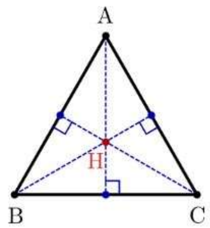
② 꼭짓점으로부터 ______의 길이비를 이룬다.

③ ____________________는 같다.

④ $(\_\_\_\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_\_\_\_)$

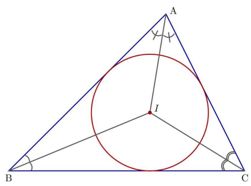
⑤ ______________ __이 최소가 되는 점 P가 무게중심

2] 수심



① ________________________________의 교점

3] 내심

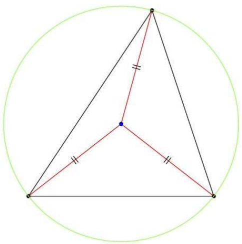


① ______________________의 교점

② ____________의 중심

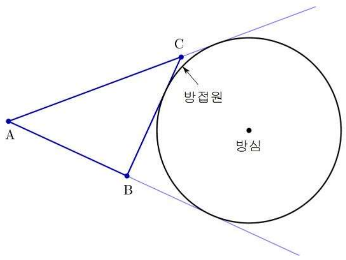
③ ___________________________가 모두 같다.

4] 외심



① ____________________의 교점
② ___________의 중심
③ _________________________가 모두 같다.

5] 방심
삼각형의 외부에 있으면서 삼각형의 한 변과 다른 두 변의 연장선과 접하는 원을 그 삼각형의 방접원이라고 한다.
방접원의 중심.



5. 자취(_________)문제
구하고자하는 점을 ______, 이용하는 점을 ______로 둔다.

1. 관점에 따른 식의 이해

① 방정식: 해를 구하는 것이 목적이다.

ex1) $2x-y+1=0$의 해를 구하여라.

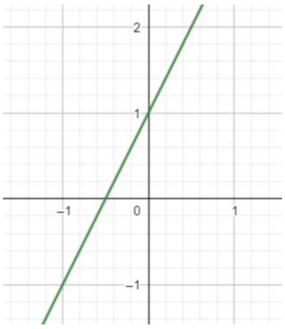
풀이] (1, 3), (2, 5), (3, 7) …

② 직선의 방정식: 기하학적으로 표현하는 것이 목적이다.

ex2) $2x-y+1=0$의 그래프를 그려라.

풀이] $2x-y+1=0$, $y=2x+1$

기울기가 2고 y절편이 1인 직선



2. 직선의 이해

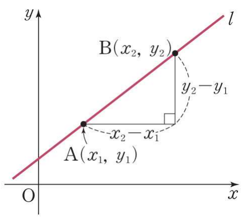
$y=2x+k$위에 $(0,1)$이 있다.

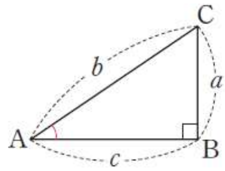
⇔ $y=2x+k$이 $(0,1)$을 지난다.

⇔ $y=2x+k$이 $(0,1)$을 만족한다.

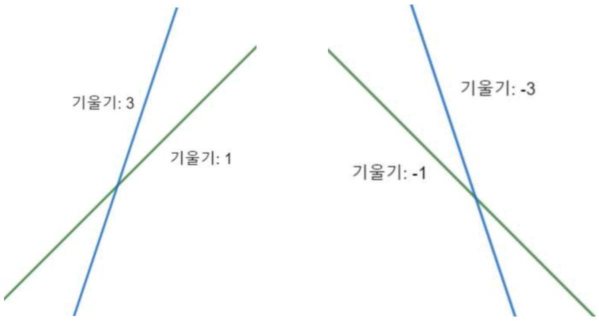
⇔ $y=2x+k$에 $(0,1)$을 대입했을 때, 식이 성립한다.

3. 기울기





① 기울기=$\dfrac{y\text{증가량}}{x\text{증가량}}$ ⇔ $\tan A=\dfrac{\text{높이}}{\text{밑변}}$



② 기울기의 절댓값이 클수록 급격해진다.

4. 한 직선의 공식들

① 기울기가 m이고 y절편이 k인 직선의 방정식

=> $y=mx+k$

② 점 $(x_1,\ y_1)$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식

=> $y-y_1=m(x-x_1)$

③ 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$을 지나는 직선의 방정식

=> $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$ (단, $x_1\neq x_2$)

④ 점 $(x_1,\ y_1)$을 지나고 x축에 평행한 직선의 방정식

=> $y=y_1$

⑤ 점 $(x_1,\ y_1)$을 지나고 y축에 평행한 직선의 방정식

=> $x=x_1$

⑥ x절편이 a, y절편이 b인 직선의 방정식은

=> $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ (단, $ab\neq 0$)

5. 두 직선의 공식들

	한 점	평행	일치	수직
$y=mx+n$ $y=m'x+n'$	$m\neq m'$	$m=m'$ $n\neq n'$	$m=m'$ $n=n'$	$mm'=-1$
$ax+by+c=0$ $a'x+b'y+c'=0$ (단, $a,b,c,a',b',c'\neq 0$)	$\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$	$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$	$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$	$aa'+bb'=0$

6. 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식

=> $ax+by+c=0,\ a'x+b'y+c'=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$(ax+by+c)+k(a'x+b'y+c')=0$ (k는 실수)

꼴로 나타낼 수 있다. (단, 직선 $a'x+b'y+c'=0$은 제외한다.)

ex3) 두 직선 $3x-2y+3=0,\ x-3y-3=0$의 교점과 원점을 지나는 직선의 방정식?

풀이] $4x-5y=0$
$3x-2y+3+k(x-3y-3)=0$ (k는 실수)으로 놓으면 이 직선이 원점을 지나므로
$3-3k=0 \quad \therefore k=1$
따라서 $(3x-2y+3)+(x-3y-3)=0 \quad \therefore 4x-5y=0$

7. 점과 직선 사이의 거리(수직거리)

좌표평면에서 점 $(x_1,\ y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는 $\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

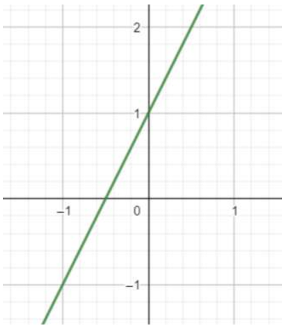
1. 관점에 따른 식의 이해

① 방정식: ____________________이 목적이다.

ex1) $2x-y+1=0$의 해를 구하여라.
풀이] (1, 3), (2, 5), (3, 7) ⋯

② 직선의 방정식: ____________________이 목적이다.

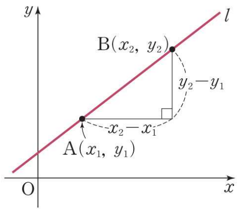
ex2) $2x-y+1=0$의 그래프를 그려라.
풀이] $2x-y+1=0$, $y=2x+1$
기울기가 2고 y절편이 1인 직선

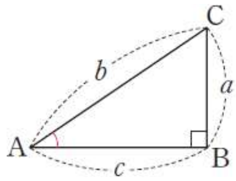


2. 직선의 이해

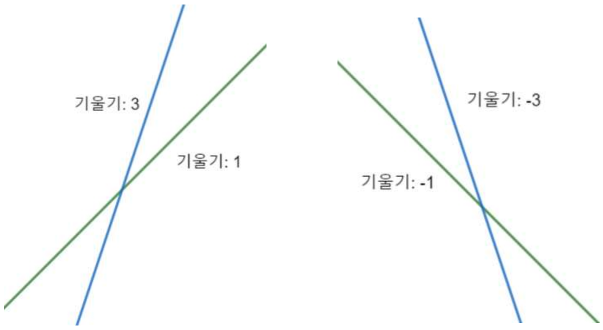
$y=2x+k$위에 $(0,1)$이 있다.
⇔ $y=2x+k$이 $(0,1)$을 __________.
⇔ $y=2x+k$이 $(0,1)$을 __________.
⇔ $y=2x+k$에 $(0,1)$을 대입했을 때, ____________.

3. 기울기





① 기울기= ________ ⇔ $\tan A=$ ________



② 기울기의 ________________________________.

4. 한 직선의 공식들

① 기울기가 m이고 y절편이 k인 직선의 방정식
=> _____________

② 점 $(x_1,\ y_1)$을 지나고 기울기가 m인 직선의 방정식
=> ________________________________

③ 두 점 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$을 지나는 직선의 방정식

=> __________________________ (단, $x_1 \neq x_2$)

④ 점 $(x_1,\ y_1)$을 지나고 x축에 평행한 직선의 방정식
=> ____________

⑤ 점 $(x_1,\ y_1)$을 지나고 y축에 평행한 직선의 방정식
=> ____________

⑥ x절편이 a, y절편이 b인 직선의 방정식은

=> _____________________ (단, $ab \neq 0$)

5. 두 직선의 공식들

	한 점	평행	일치	수직
$y=mx+n$ $y=m'x+n'$	________	________ ________	________ ________	________
$ax+by+c=0$ $a'x+b'y+c'=0$ (단, $a,b,c,a',b',c' \neq 0$)	________	________	________	________

6. 두 직선의 교점을 지나는 직선의 방정식

=> $ax+by+c=0,\ a'x+b'y+c'=0$의 교점을 지나는 직선의 방정식은
______________________________ (k는 실수)
꼴로 나타낼 수 있다. (단, 직선 $a'x+b'y+c'=0$은 제외한다.)

ex3) 두 직선 $3x-2y+3=0,\ x-3y-3=0$의 교점과 원점을 지나는 직선의 방정식?

풀이]

7. 점과 직선 사이의 거리(________)

좌표평면에서 점 $(x_1,\ y_1)$과 직선 $ax+by+c=0$ 사이의 거리는 ____________

1. 원의 방정식(암기)

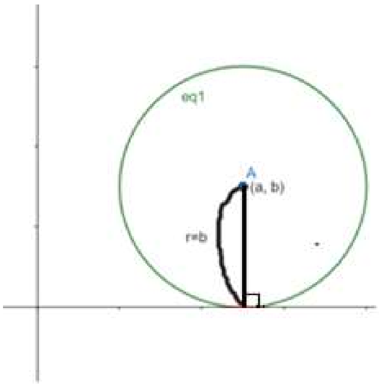
① $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

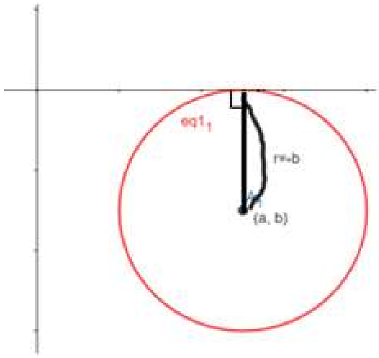
② $x^2+y^2+Ax+By+C=0$

※ 가장 중요한 것은 중심(a,b)이다.
중심이 기준이 된다.

2. 축에 접하는 원

$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$





$(x-a)^2+(y-b)^2=(-b)^2$

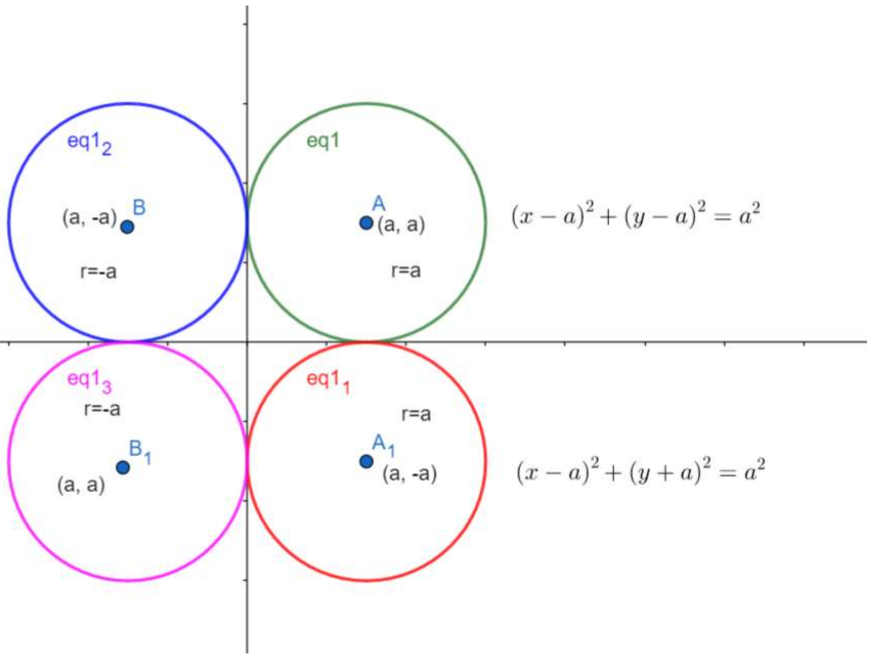
$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$

ex1) 중심이 $(-2,\ 3)$이고 x축에 접하는 원

$\therefore (x+2)^2+(y-3)^2=9$

ex2) 중심이 $(-2,\ -2)$이고 x축, y축에 동시에 접하는 원

$\therefore (x+2)^2+(y+2)^2=4$



3. 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식(암기)

=> O ; $\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2+\mathrm{ax}+\mathrm{by}+\mathrm{c}=0$,
O′: $x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$
의 교점을 지나는 원의 방정식은

$x^2+y^2+ax+by+c+k(x^2+y^2+a'x+b'y+c')=0$
(단, $k\neq -1$)꼴로 나타낼 수 있다.
(원 O′: $x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$ 제외)

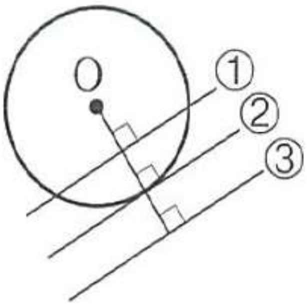
4. 공통현의 방정식(암기)

=> O ; $\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2+\mathrm{ax}+\mathrm{by}+\mathrm{c}=0$,
O′: $x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$
의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x^2+y^2+ax+by+c-(x^2+y^2+a'x+b'y+c')=0$

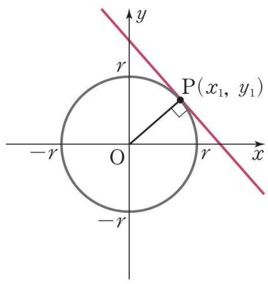
5. 원과 접선

원의 중심과 직선 사이의 거리를 d, 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원과 직선의 위치관계는
① $d<r$ ➲ 두 점에서 만난다.
② $d=r$ ➲ 한 점에서 만난다.(접한다.)
③ $d>r$ ➲ 만나지 않는다.



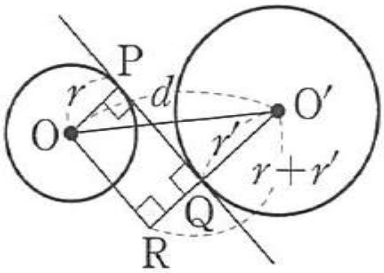
6. 원 위의 점이 주어진 접선(암기)

① 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은
$x_1x+y_1y=r^2$



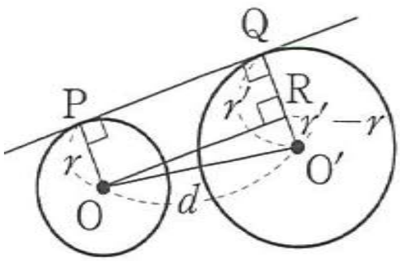
② 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선
$(x_1-a)(x-a)+(y_1-b)(y-b)=r^2$

7. 공통내접선



$\overline{\mathrm{OR}}=\sqrt{d^2-(r+r')^2}$

8. 공통외접선



$\overline{\mathrm{OR}}=\sqrt{d^2-(r'-r)^2}$

9. 아폴로니우스의 원(암기)

ex3) 두 점 $\mathrm{A}(-3,\ 0)$, $\mathrm{B}(1,\ 0)$으로부터의
거리의 비가 $3:1$인 점 P에 대하여 P의 자취의 방정식을
구하여라.

풀이] $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{9}{4}$

① $\mathrm{P(x,\ y)}$라 하면 $\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=3:1$이므로
$\overline{\mathrm{AP}}=3\overline{\mathrm{BP}}$, $\overline{\mathrm{AP}}^2=9\overline{\mathrm{BP}}^2$
$(x+3)^2+y^2=9\{(x-1)^2+y^2\}$
$x^2+y^2-3x=0$ $\therefore \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{9}{4}$

② 아폴로니우스의 원에 의해, $\mathrm{A}(-3,\ 0)$, $\mathrm{B}(1,\ 0)$의
$3:1$로 내분하는 내분점과 외분하는 외분점이 지름의
양끝점이다.
내분점은 $(0,0)$, 외분점은 $(3,0)$
따라서 원의 중심은 $(\frac{3}{2},0)$, 반지름은 $\frac{3}{2}$이다.
$\therefore \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{9}{4}$

1. 원의 방정식(암기)

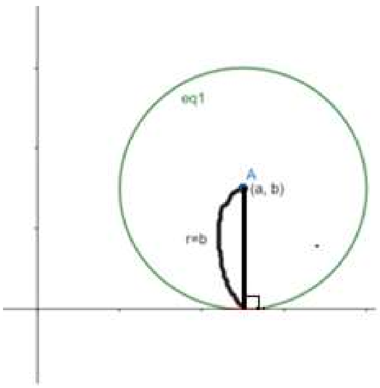
① ____________________

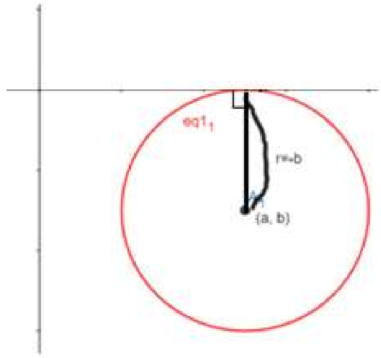
② ____________________

※ 가장 중요한 것은 ________이다. ______이 기준이 된다.

2. 축에 접하는 원

____





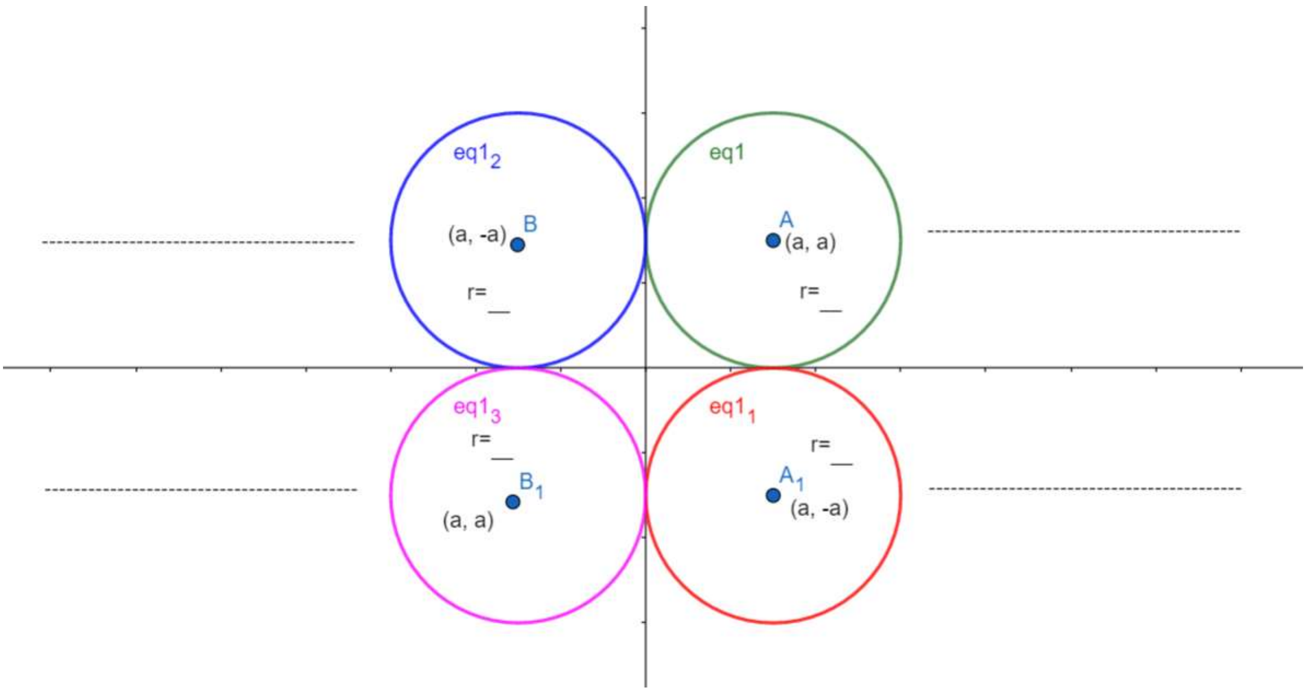
____

ex1) 중심이 $(-2,\ 3)$이고 x축에 접하는 원

∴ ____________________

ex2) 중심이 $(-2,\ -2)$이고 x축, y축에 동시에 접하는 원

∴ ____________________



3. 두 원의 교점을 지나는 원의 방정식(암기)

=> O ; $x^2+y^2+ax+by+c=0$,

O′: $x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$

의 교점을 지나는 원의 방정식은

____

(단, ________)꼴로 나타낼 수 있다.

(원 O′: $x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$ 제외)

4. 공통현의 방정식(암기)

=> O ; $x^2+y^2+ax+by+c=0$,

O′: $x^2+y^2+a'x+b'y+c'=0$

의 교점을 지나는 직선의 방정식은

____

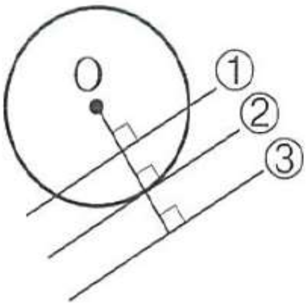
5. 원과 접선

원의 중심과 직선 사이의 거리를 d, 원의 반지름의 길이를 r라 하면 원과 직선의 위치관계는

① ______ ➲ 두 점에서 만난다.

② ______ ➲ 한 점에서 만난다.(접한다.)

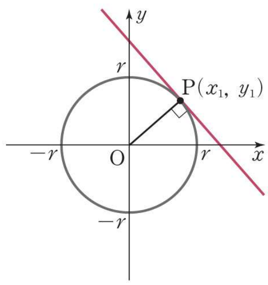
③ ______ ➲ 만나지 않는다.



6. 원 위의 점이 주어진 접선(암기)

① 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은

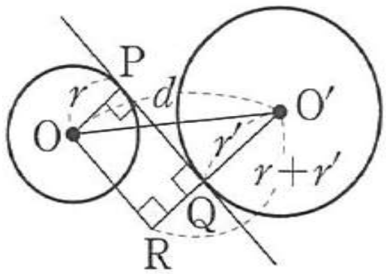
____



② 원 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 위의 점 $(x_1,\ y_1)$에서의 접선

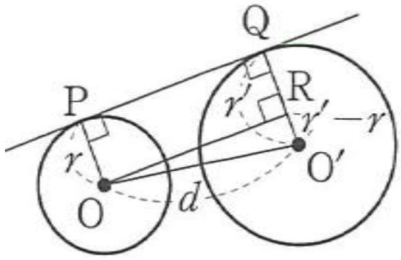
____

7. 공통내접선



$\overline{\mathrm{OR}}$ = ____________________

8. 공통외접선



$\overline{\mathrm{OR}}$ = _______________________

9. 아폴로니우스의 원(암기)

ex3) 두 점 $\mathrm{A}(-3,\ 0)$, $\mathrm{B}(1,\ 0)$으로부터의
거리의 비가 $3:1$인 점 P에 대하여 P의 자취의 방정식을
구하여라.

풀이]

①

②

1. 표현의 이해

① (x, y) : 주로 점을 나타낼 때 사용

② $y=f(x)$: 주로 표준형 꼴의 도형을 간단히 표현할 때 사용

ex1) $y=2x+1 \Rightarrow y=f(x)$, $f(x)=2x+1$

③ $f(x, y)=0$: 주로 일반형 꼴의 도형을 간단히 표현할 때 사용

ex2) $2x-y+1=0 \Rightarrow f(x, y)=0$, $f(x, y)=2x-y+1$

2. 평행이동(x축으로 a만큼, y축으로 b만큼)

점	(x, y)	$\Rightarrow$	$(x+a, y+b)$
도형	$y=f(x)$	$\Rightarrow$	$y-b=f(x-a)$, $y=f(x-a)+b$
	$f(x, y)=0$	$\Rightarrow$	$f(x-a, y-b)=0$

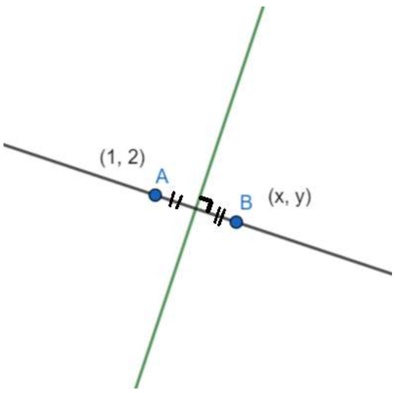
3. 대칭이동

	점			도형		
x축	(x, y)	$\Rightarrow$	$(x, -y)$	$f(x, y)=0$	$\Rightarrow$	$f(x, -y)=0$
y축	(x, y)	$\Rightarrow$	$(-x, y)$	$f(x, y)=0$	$\Rightarrow$	$f(-x, y)=0$
원점	(x, y)	$\Rightarrow$	$(-x, -y)$	$f(x, y)=0$	$\Rightarrow$	$f(-x, -y)=0$
$y=x$	(x, y)	$\Rightarrow$	(y, x)	$f(x, y)=0$	$\Rightarrow$	$f(y, x)=0$
$y=-x$	(x, y)	$\Rightarrow$	$(-y, -x)$	$f(x, y)=0$	$\Rightarrow$	$f(-y, -x)=0$

4. $y=ax+b$에 대한 대칭이동

ex3) 직선 $y=3x+2$에 대하여 $(1,\ 2)$를 대칭

풀이] 구하고자하는 점을 (x, y)



(i) $(1,\ 2)$, (x, y)에서 $y=3x+2$까지의 거리가 같다.

따라서$(1,\ 2)$, (x, y)의 중점$\left(\dfrac{x+1}{2},\ \dfrac{y+2}{2}\right)$이

$y=3x+2$위에 있다. $\dfrac{y+2}{2}=3\dfrac{x+1}{2}+2$, $3x-y=-5$

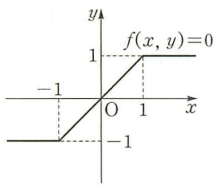
(ii)$(1,\ 2)$와 (x, y)를 이은 기울기가 직선 $y=3x+2$와 수직

$$\frac{y-2}{x-1}=-\frac{1}{3},\ x-1=6-3y \qquad \therefore\ x+3y=7$$

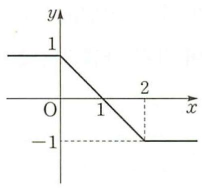
연립하여 풀면 $x=-\dfrac{4}{5}$, $y=\dfrac{13}{5}$

5. 응용(일반적인 그림에서는 선말고 점부터 옮긴다)

ex4) 방정식 $f(x,\ y)=0$ 이 나타내는 도형이 [그림 1]과 같을 때, [그림 2]와 같은 도형을 나타내는 방정식인 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?



[그림 1]



[그림 2]

[보 기]

ㄱ. $f(x+1,\ -y)=0$

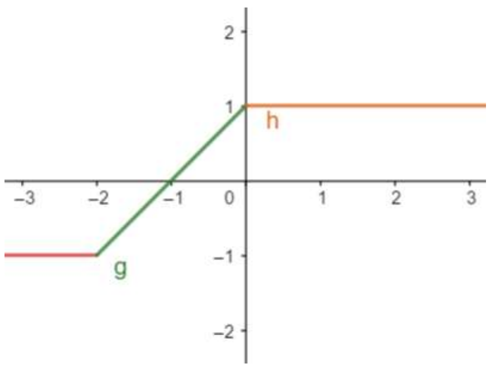
ㄴ. $f(x-1,\ -y)=0$

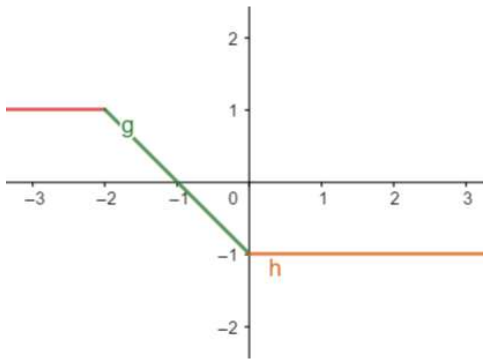
ㄷ. $f(1-x,\ y)=0$

풀이] ㄴ, ㄷ

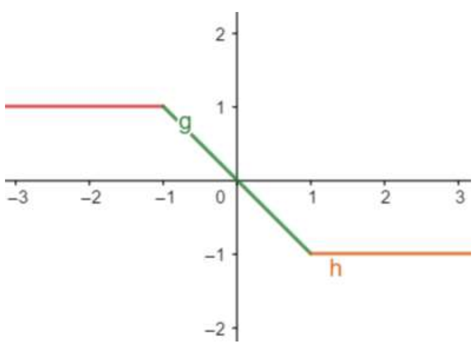
ㄱ.

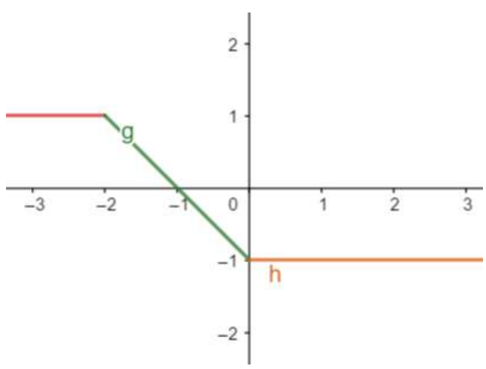
① $f(x,y)=0 \xrightarrow{x\text{축으로 } -1\text{만큼 평행이동}} f(x+1,y)=0 \xrightarrow[x\text{축 대칭}]{} f(x+1,\ -y)=0$





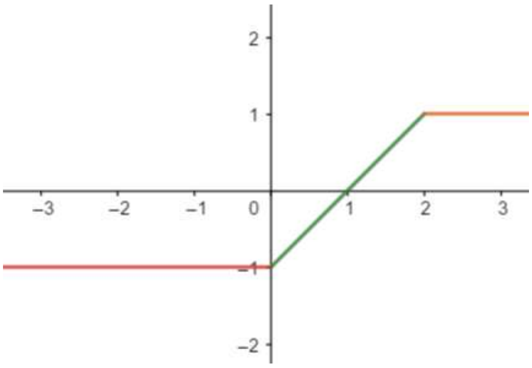
② $f(x,y)=0 \xrightarrow{x\text{축 대칭}} f(x,\ -y)=0 \xrightarrow[x\text{축으로 } -1\text{만큼 평행이동}]{} f(x+1,\ -y)=0$

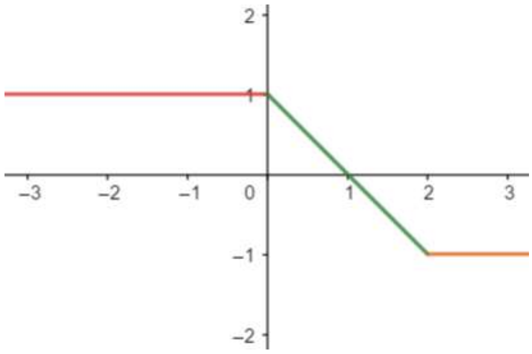




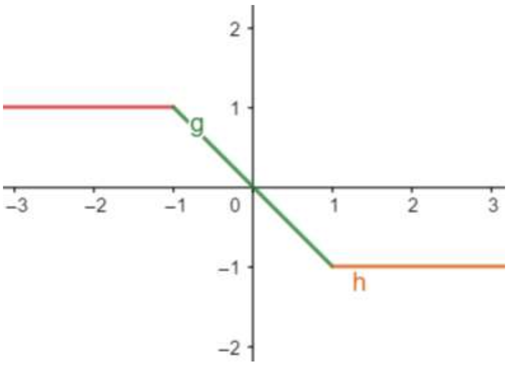
ㄴ.

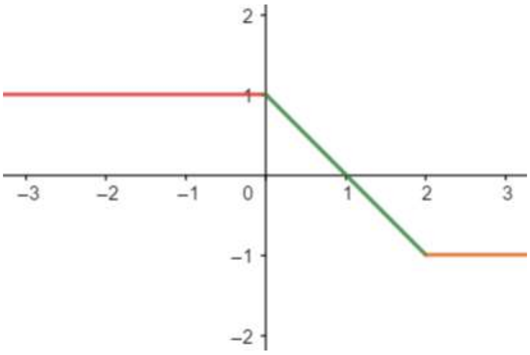
① $f(x,y)=0 \xrightarrow{x\text{축으로 1만큼 평행이동}} f(x-1,y)=0 \xrightarrow[x\text{축 대칭}]{} f(x-1,\ -y)=0$





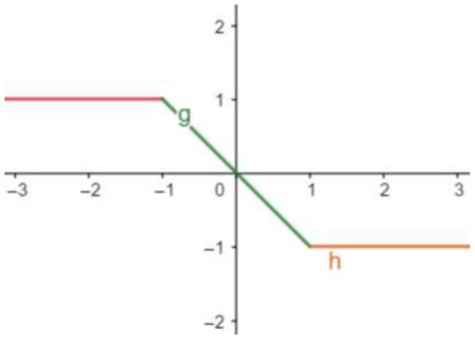
② $f(x,y)=0 \xrightarrow{x\text{축 대칭}} f(x,\ -y)=0 \xrightarrow[x\text{축 1만큼 평행이동}]{} f(x-1,\ -y)=0$

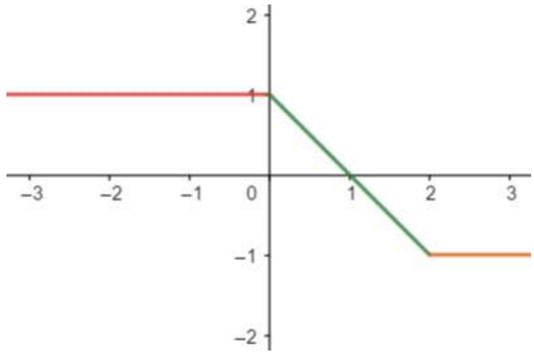




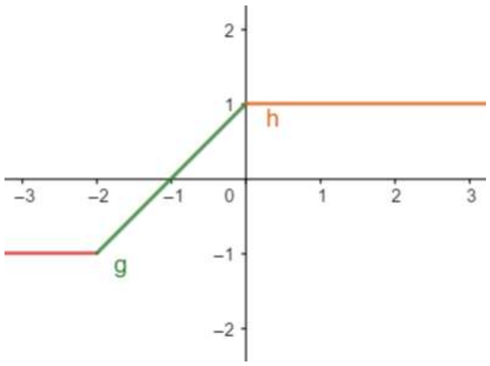
ㄷ.

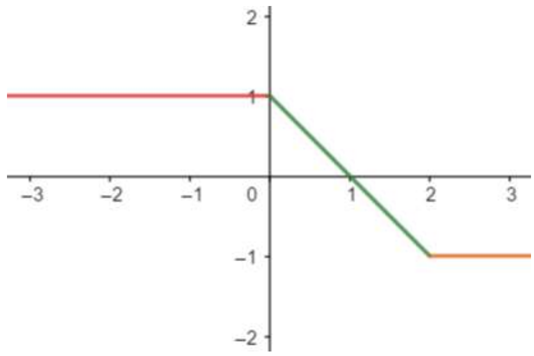
① $f(x,y)=0 \xRightarrow{y\text{축 대칭}} f(-x,\ y)=0 \xRightarrow[x\text{축 1만큼 평행이동}]{} f(-(x-1),\ y)=0$





② $f(x,y)=0 \xRightarrow{x\text{축 }-1\text{만큼 평행이동}} f(x+1,\ y)=0 \xRightarrow[y\text{축 대칭}]{} f(1-x,\ y)=0$





1. 표현의 이해

① (x, y) : 주로 __을 나타낼 때 사용

② $y=f(x)$: 주로 표준형 꼴의 도형을 간단히 표현할 때 사용

ex1) $y=2x+1 \Rightarrow y=f(x)$, $f(x)=2x+1$

③ $f(x, y)=0$: 주로 일반형 꼴의 도형을 간단히 표현할 때 사용

ex2) $2x-y+1=0 \Rightarrow$__________, _______________

2. 평행이동(x축으로 a만큼, y축으로 b만큼)

점	(x, y)	$\Rightarrow$	___________
도형	$y=f(x)$	$\Rightarrow$	___________, ____________
	$f(x, y)=0$	$\Rightarrow$	___________

3. 대칭이동

	점	도형
x축	(x, y) $\Rightarrow$ _______	$f(x, y)=0$ $\Rightarrow$ ____________
y축	(x, y) $\Rightarrow$ _______	$f(x, y)=0$ $\Rightarrow$ ____________
원점	(x, y) $\Rightarrow$ _______	$f(x, y)=0$ $\Rightarrow$ ____________
$y=x$	(x, y) $\Rightarrow$ _______	$f(x, y)=0$ $\Rightarrow$ ____________
$y=-x$	(x, y) $\Rightarrow$ _______	$f(x, y)=0$ $\Rightarrow$ ____________

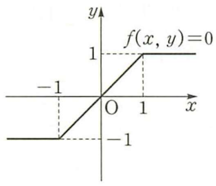
4. $y=ax+b$에 대한 대칭이동

ex3) 직선 $y=3x+2$에 대하여 $(1,\ 2)$를 대칭

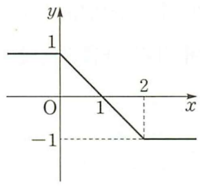
풀이]

5. 응용(일반적인 그림에서는 선말고 __부터 옮긴다)

ex4) 방정식 $f(x,\ y)=0$ 이 나타내는 도형이 [그림 1]과 같을 때, [그림 2]와 같은 도형을 나타내는 방정식인 것만을 [보기]에서 있는 대로 고른 것은?



[그림 1]



[그림 2]

[보 기]

ㄱ. $f(x+1,\ -y)=0$

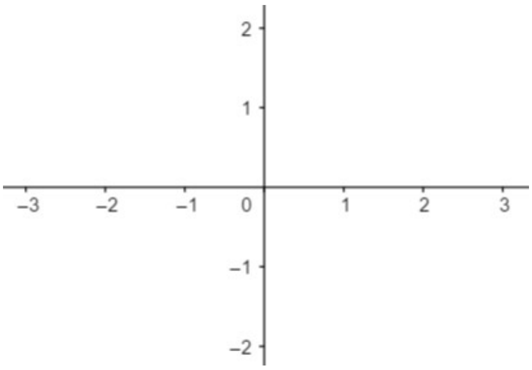
ㄴ. $f(x-1,\ -y)=0$

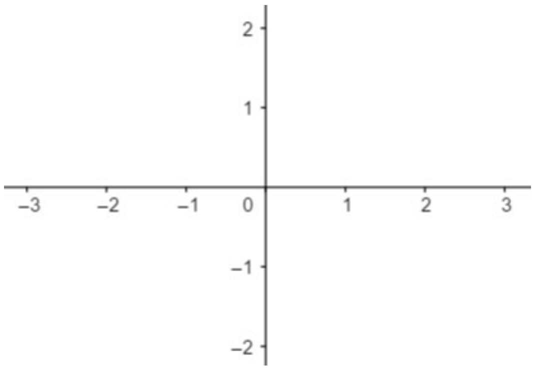
ㄷ. $f(1-x,\ y)=0$

풀이]

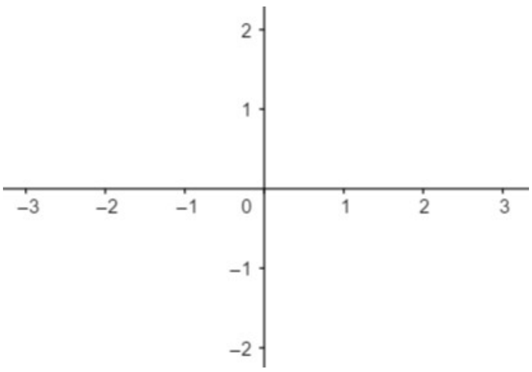
ㄱ.

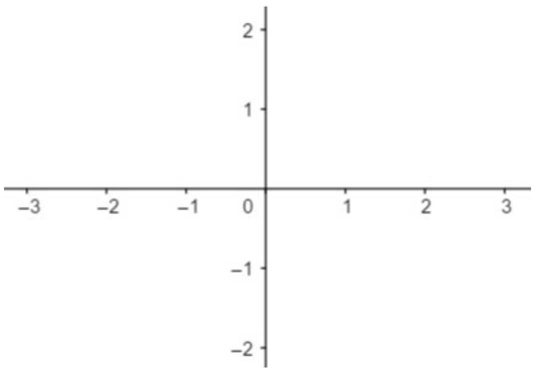
① $f(x,y)=0$ ⇒ ______ ⇒ $f(x+1,\ -y)=0$





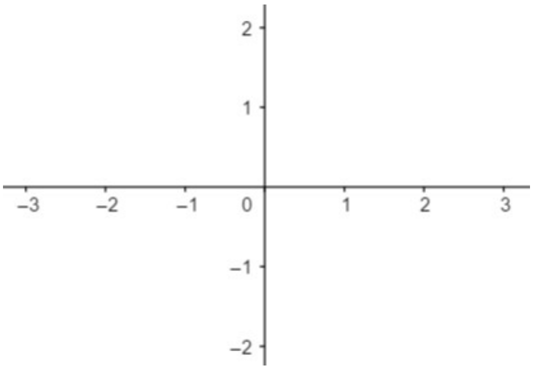
② $f(x,y)=0$ ⇒ ______ ⇒ $f(x+1,\ -y)=0$

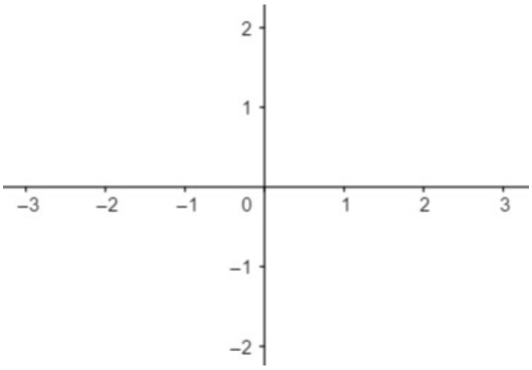




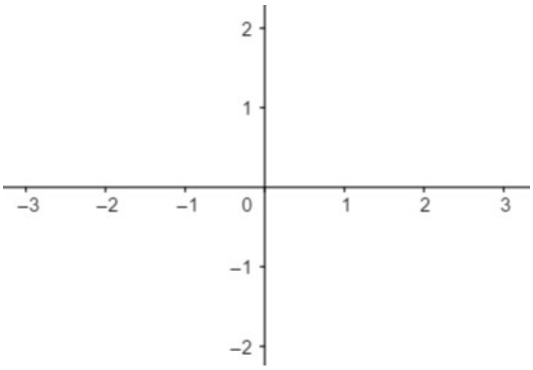
ㄴ.

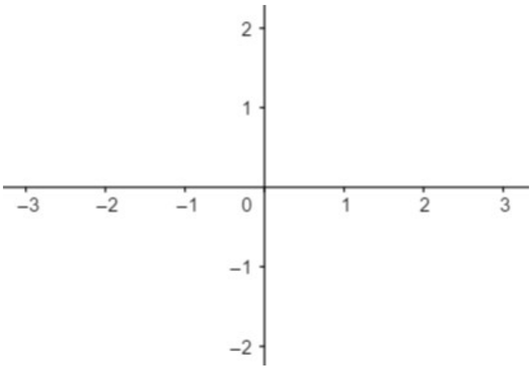
① $f(x,y)=0$ ______ $\Rightarrow$ ______ $\Rightarrow$ ______ $f(x-1,\ -y)=0$





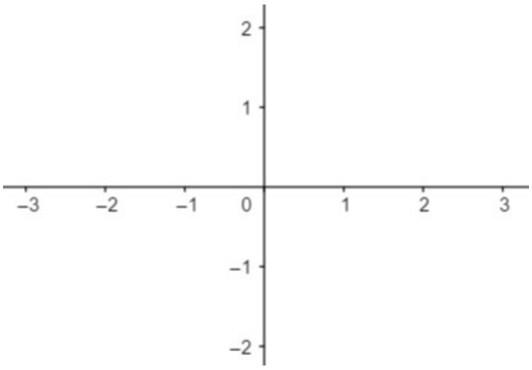
② $f(x,y)=0$ ______ $\Rightarrow$ ______ $\Rightarrow$ ______ $f(x-1,\ -y)=0$

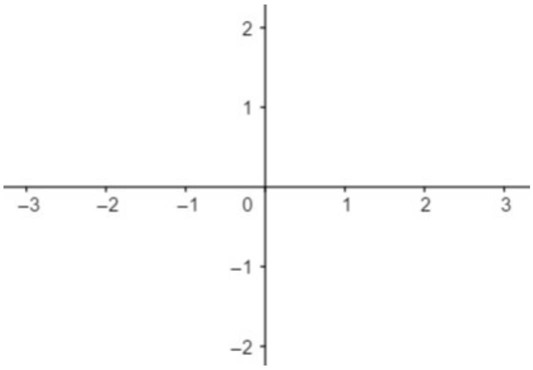




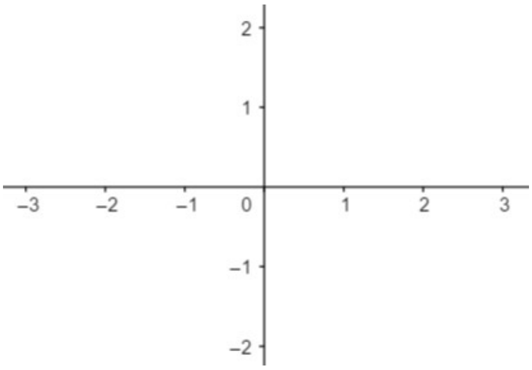
ㄷ.

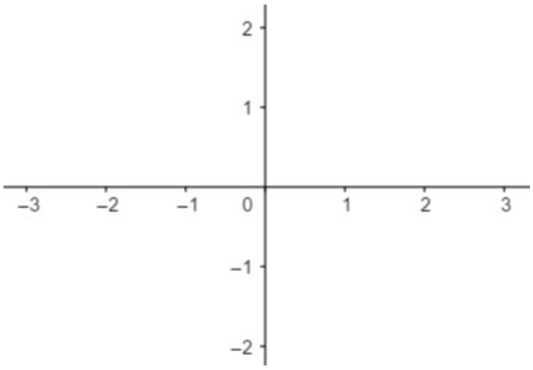
① $f(x,y)=0$ ____________________ $\Rightarrow$ ___________ $\Rightarrow$ ____________________ $f(1-x,\ y)=0$





② $f(x,y)=0$ ____________________ $\Rightarrow$ ___________ $\Rightarrow$ ____________________ $f(1-x,\ y)=0$





1. [서술형 3분] [프린트6 Z2번] [원방]

이차함수 $y=-2x^2$의 그래프와
원 $x^2+(y-1)^2=1$에 동시에 접하는 기울기가 양수인 직선의 방정식을 구하시오. [8점][1)]

2. [서술형 2분] [프린트4 Z1번] [원방]

원 $(x-1)^2+y^2=4$와 직선 $y=3x$가 만나는 두 점 A, B에 대하여 선분 AB의 수직이등분선의 방정식을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오. [3점][2)]

프린트6 Z2번

프린트4 Z1번

1) $y=mx+n$으로 잡고 시작하자

2) 수직이등분선은 원의 중심을 지나겠지?

3. [프린트8 Z6번]
다음 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 값이 -2만 되도록 하는 실수 k의 값의 범위는? [5.0점]3)

$$\begin{cases} x^2-x-2>0 \\ 2x^2+(5+2k)x+5k<0 \end{cases}$$

① $-1<k\le 2$　② $-4<k\le -2$
③ $-2<k<1$　④ $-3\le k<2$
⑤ $-1\le k\le 3$

4. [프린트8 Z7번] [원방]
원점을 지나는 원이 두 점 $(-\sqrt{3},\ 3)$, $(2,\ 2)$을 지난다. 점 $(1,\ 5)$에 이 원에 두 접선을 그을 때, 접점을 각각 B와 C라 하자. 이때 선분 BC의 길이는? [5.3점]4)

① $\frac{4}{5}\sqrt{15}$　② $\frac{6}{5}\sqrt{15}$　③ $\frac{8}{5}\sqrt{15}$
④ $2\sqrt{15}$　⑤ $\frac{12}{5}\sqrt{15}$

프린트8 Z6번

프린트8 Z7번

3) $-k$가 3이 되더라도 될까? 안될까?

4) 원의 중심에서 두 접점에 수선의 발을 각각 내려

5. [프린트7 Z7번]

두 점 $\mathrm{A}(-3,\ 7)$, $\mathrm{B}(3,\ -2)$와 직선 AB위에 점 C에 대하여 삼각형 OAB의 넓이와 삼각형 OBC의 넓이의 비가 $3:1$이 되도록 하는 점C는 2개 존재한다. 점C의 좌표를 각각 $(a,\ b)$와 $(c,\ d)$라 할 때, 실수 $a,\ b,\ c,\ d$에 대하여 $(abcd)^2$의 값을 구하시오. [5.0점][5]

6. [프린트7 Z9번]

모든 실수 x에 대하여 부등식

$-1 \le (a-1)x+b \le x^2+2x+2$

이 성립할 때, 정수 $a,\ b$에 대하여 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는? [5.2점][6]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

프린트7 Z7번

프린트7 Z9번

5) 그림을 그리고 두 삼각형의 높이가 같다는 걸 인지해

6) 좌변에서 $a=1$이라는 걸 인식하셔

7. [프린트1 Z1번]

점 $(-2,\ 3)$과 직선

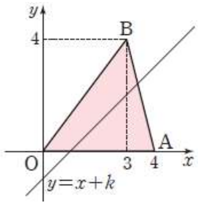
$$(k-2)x+(2k+1)y+(2-k)=0$$

사이의 거리가 최대가 될 때, 실수 k의 값을 구하시오.7)

프린트1 Z1번

8. [프린트1 Z13번]

오른쪽 그림과 같이 세 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(4,\ 0)$, $\mathrm{B}(3,\ 4)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 OAB의 넓이를 직선 $y=x+k$가 이등분할 때, 상수 k의 값을 구하시오.8)



프린트1 Z13번

7) k로 묶고 그림을 그려야지

8) 직선 OB와 $y=x+k$의 기울기가 달라!

9. [프린트1 Z25번] [원방]
점 $(3,\ 4)$에서 원 $x^2+y^2=5$에 그은 두 접선이 원과 만나는 점을 각각 P, Q라고 할 때, 직선 PQ의 방정식을 구하여라.[9)]

프린트1 Z25번

10. [프린트2 Z4번]
두 직선 $x+y-1=0$, $mx-y+m-1=0$이 각 사분면에서 만나도록 하는 실수 m의 값의 범위를 구하여라.[10)]

(1) 1사분면

(2) 2사분면

(3) 4사분면

프린트2 Z4번

9) 원의 중심에서 P, Q에 수선의 발을 내려

10) m으로 묶고 그림을 그려봐. $(0,1), (1,0)$을 지날 때, 또한 평행할 때를 생각해봐.

11. [프린트2 Z5번]

두 직선 $x+y-1=0$, $mx+y+2m+1=0$이 각 사분면에서 만나도록 하는 실수 m의 값의 범위를 구하여라.11)

(1) 1사분면

(2) 2사분면

(3) 4사분면

12. [프린트2 Z35번]

이차방정식 $ax^2-4x+a=0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $0<\alpha<\beta<2$를 만족시키는 실수 a의 값의 범위는?12)

① $-2<a<2$ ② $-2<a<1$

③ $0<a<\frac{8}{5}$ ④ $1<a<2$

⑤ $\frac{8}{5}<a<2$

프린트2 Z5번

프린트2 Z35번

11) 기울기가 $-m$이란 걸 낚이지마

12) 현재 a가 양수인지, 음수인지 알아 몰라?

13. [프린트4 Z3번]

이차방정식 $ax^2-2x+a-2=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 할 때, $-1<\alpha<0,\ 2<\beta<3$이 되도록 하는 실수 a의 값의 범위를 구하시오. [5점]13)

프린트4 Z3번

13) 합쳐서 구해도 되는데, 왜 되는지를 꼭 확인해봐

14. [프린트3 Z16번] [원방]

원 $x^2+y^2=4$ 위를 움직이는 점 A와 직선 $y=x-4\sqrt{2}$ 위를 움직이는 서로 다른 두 점 B, C를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC를 만들 때, 정삼각형이 되는 삼각형 ABC의 넓이의 최댓값과 최솟값을 구하시오.14)

프린트3Z16번1

프린트3Z16번2

14) 높이가 최소이면 넓이도 최소. 높이가 최대이면 넓이도 최대.

15. [프린트3 Z17번] [원방]
직선 $y=mx+n$이 두 원 $x^2+y^2=9$, $(x+3)^2+y^2=4$에 동시에 접할 때, 두 실수 m, n에 대하여 $32mn$의 값을 구하는 풀이 과정과 답을 쓰시오.[15)]

프린트3Z17번1

프린트3Z17번2

15) 그림을 그려봐. 닮음이 보일 것이다.

16. [프린트8 Z19번] [원방]
방정식 $(x-6)^2+(y-8)^2=10$을 만족하는 실수 x, y에 대하여 $\sqrt{x^2+y^2}$의 값이 양의 정수가 되는 순서쌍 (x, y)의 개수는?16)

① 20 ② 18
③ 16 ④ 14
⑤ 12

프린트8 Z19번

17. [프린트7 Z12번] [이동]
두 점 $\mathrm{A}(2,\ 5)$, $\mathrm{B}(7,\ 0)$과 직선 $x+y=4$가 있다. 이 직선 위에 한 점 P를 잡아 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$가 최소가 되게 할 때, 점 P의 좌표는? [4.7점]17)

① $\mathrm{P}(3,\ 1)$ ② $\mathrm{P}\left(\frac{5}{2},\ \frac{3}{2}\right)$
③ $\mathrm{P}(2,\ 2)$ ④ $\mathrm{P}\left(\frac{3}{2},\ \frac{5}{2}\right)$
⑤ $\mathrm{P}(1,\ 3)$

프린트7 Z12번

16) 만족하는 x, y는 $(x-6)^2+(y-8)^2=10$과 만나는 점이 있다는 거지

17) $\mathrm{B}(7,\ 0)$을 $x+y=4$에 대칭시켜봐

18. [프린트7 Z13번] [원방]
중심이 $y=2x$위에 있고 점 $(1,\ 6)$을 지나는 원이 있다. 이 원 위를 움직이는 점 A와 직선 $x+2y+5=0$ 사이의 거리의 최댓값이 $4\sqrt{5}$일 때, 이 원의 반지름의 길이는? (단, 원의 중심은 제 1사분면 위에 있다.) [5.3점][18]

① $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ ② $\sqrt{5}$ ③ $\dfrac{5}{2}$
④ $2\sqrt{5}$ ⑤ 5

프린트7 Z13번

19. [프린트7 Z19번] [원방]
원 $x^2+y^2=36$ 위의 세 점 $\mathrm{A}(-6,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ -6)$, $\mathrm{P}(a,\ b)$에 대하여 삼각형 ABP의 무게중심의 좌표를 $\mathrm{G}(p,\ q)$라 할 때, $4p-3q$의 최솟값과 최댓값을 구하시오.[19]

프린트7 Z19번

18) 직선에서 원의 중심까지의 거리에서 반지름을 더하면 최댓값인 거 알겠지?

19) $a^2+b^2=36$이고 $p=\dfrac{a-6}{3}, q=\dfrac{b-6}{3}$.

20. [프린트7 Z20번]
두 직선 $4x-y+1=0$, $x+y-6=0$의 교점을 지나는 직선 중 원점으로부터의 거리가 가장 먼 직선까지의 거리는? [5.2점][20)]

① 5 ② $\sqrt{26}$
③ $3\sqrt{3}$ ④ $2\sqrt{7}$
⑤ $\sqrt{29}$

21. [프린트7 Z22번] [원방]
두 원 $x^2+y^2+6x-8y=0$, $x^2+y^2-10=0$의 두 교점을 각각 A, B라 하자. 0이 아닌 실수 r에 대하여 두 점 A, B를 지나는 직선과 원 $(x-2)^2+(y+1)^2=r^2$의 서로 다른 교점의 개수를 $f(r)$이라 할 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [5.6점][21)]

<보 기>

ㄱ. $f(\sqrt{10})=2$
ㄴ. 선분 AB의 길이 a에 대하여 $5f(r)=a$를 만족하는 자연수 r이 존재한다.
ㄷ. $f(r_1)+f(r_2)=1$을 만족하는 0이 아닌 정수 r_1, r_2에 대하여 $|r_1-r_2|$의 최댓값과 최솟값의 합은 6이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

프린트7 Z20번

프린트7 Z22번

20) 교점을 일단 구하고, 좌표평면을 그려!

21) r이 반지름이란 말도, 양의 실수란 말도 없자나...

22. [R519]
x에 대한 삼차방정식
$x^3+(2k+1)x^2+(2k^2+2k-1)x+2k^2-1=0$의 세 근이 존재할 때, 세 근 중 적어도 하나가 양수일 때, 실수 k값의 범위는?22)

23. [프린트2 Z71번]
좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 3)$, $\mathrm{B}(0,\ 4)$에 대하여 선분 AB를 $m:n$ $(m>n>0)$으로 외분하는 점을 Q라 하자. 삼각형 OAQ의 넓이가 16일 때, $\dfrac{n}{m}$의 값은?23)

(단, O는 원점이다.)

수상 R519번

프린트2 Z71번

22) 대게 반대인 경우를 구하여 $D\geq 0$에서 빼주는 게 현명

23) 삼각형OAQ와 OAB는 높이가 같지? 먼저 삼각형OAB의 넓이부터 구해봐.

24. [프린트4 Z21번] [원방]
원 $x^2+y^2=15$와 직선 $ax+by-6=0$의 교점을 지나는 원 중에서 그 넓이가 최소인 원의 넓이는 9π이다.
이때, a^2+b^2의 값은? (단, a, b는 상수이다.)24)

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

25. [프린트4 Z24번]
두 점 $\mathrm{A}(2,\ 3)$, $\mathrm{B}(4,\ 7)$과 y축 위의 점 P에 대하여 $|\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{BP}}|$의 값이 최대가 되도록 하는 점 P의 좌표를 구하시오.25)

프린트4 Z21번

프린트4 Z24번

24) 현의 길이가 지름이 될 때, 원이 가장 작다는 걸, 그려서 확인해봐!

25) 삼각형이 될 때는, $|\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{BP}}|$가 $\overline{AB}$의 길이보다 짧아. 그렇다면, 삼각형이 붕괴될 때, $|\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{BP}}|$의 길이를 구해

26. [프린트4 Z25번] [원방]

x축 위의 점 $(n,\ 0)$에서 원 $x^2+y^2=1$에 접선을 그을 때, 제1사분면에 있는 접점을 $(x_n,\ y_n)$이라 하자. 이때 $y_2 \times y_3 \times \cdots \times y_8$의 값은? (단, $n \geq 2$인 자연수이다.)[26)]

① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$

④ $\frac{3}{4}$ ⑤ 1

프린트4 Z25번

27. [프린트4 Z28번]

좌표평면의 제1사분면 위에 한 변의 길이가 $2\sqrt{6}$인 정삼각형 ABC가 있다. 변 BC의 중점 M의 좌표가 $\mathrm{M}(5,\ 2)$이고, 정삼각형 ABC의 무게중심 G는 직선 $y=\frac{1}{2}x$ 위에 있다. 점 G의 y좌표가 2 이상일 때, 정삼각형 ABC의 세 꼭짓점 A, B, C의 y좌표의 합을 구하시오.[27)]

프린트4 Z28번

---

26) 원 위의 점$(x_n,\ y_n)$을 지나는 직선은 $x_n x + y_n y = 1$이라는 걸 이용해

27) M, G사이의 거리가 $\sqrt{2}$라는 걸 이용해

28. [프린트7 Z18번] [원방]
원 $x^2+y^2=25$ 위의 점 $\mathrm{P}(3,\ -4)$에서 이 원의 서로 다른 두 점 $\mathrm{A},\ \mathrm{B}$에 대하여 $\overline{\mathrm{PA}}=\overline{\mathrm{PB}}$이고 $\overline{\mathrm{AB}}=\dfrac{14}{5}$일 때, 두 점 $\mathrm{A},\ \mathrm{B}$를 지나는 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 넓이를 구하시오. (단, 두 점 $\mathrm{A},\ \mathrm{B}$는 제 4사분면 위의 점이다.) $[10.0$점$]$[28]

프린트7 Z18번

28) 그림을 그리고 P에서 원의 중심까지 이어봐.

29. [프린트2 Z77번]
연립부등식 $\begin{cases} x^2-a^2x \geq 0 \\ x^2-4ax+4a^2-1<0 \end{cases}$을 만족시키는 정수 x의 개수가 1이 되도록 하는 모든 실수 a의 값의 합은?[29]
(단, $0<a<\sqrt{2}$)

프린트2Z77

29) $2a-1<x<2a+1$에 정수가 한 개만 들어가려면 $2a-1$이 정수가 되어야 해.

#210628 #고1 #수상 #여러가지~도형의이동 #1-8총정리

1. $y=4\sqrt{5}x+10$

직선은 $y=mx+n$ 이라 하자.
$y=-2x^2$ 과 접하므로 방정식 $-2x^2=mx+n$,
$2x^2+mx+n=0$의 판별식 $D=0$
…2점

$mx+n=-2x^2$, $2x^2+mx+n=0$, $D=m^2-8n=0$,
$m^2=8n$ …… ㉠
…1점

원 $x^2+(y-1)^2=1$ 과 접하므로
$1=\dfrac{|-1+n|}{\sqrt{m^2+1}}$, 양변을 제곱하면
$1=\dfrac{n^2-2n+1}{m^2+1}$, $m^2=n^2-2n$
…1점

㉠에 의해 $8n=n^2-2n$, $n^2-10n=0$, $n=0$ or 10
…1점

m 은 양수이므로
ⅰ) $n=0$, $m=0$ $(\times)$
…1점

ⅱ) $n=10$, $m^2=80$, $m=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$
…1점

$y=4\sqrt{5}x+10$
…1점

2. $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3}$

해결 과정 $\overline{AB}$의 수직이등분선은 원 $(x-1)^2+y^2=4$의 중심 $(1,\ 0)$을 지나고 기울기가 $-\dfrac{1}{3}$이다. 60%

…2점

답 구하기 $y-0=-\dfrac{1}{3}(x-1)$, $y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{3}$ 40%

…1점

3. ④

1) $x^2-x-2>0$, $(x+1)(x-2)>0$
$x<-1$ 또는 $x>2$

2) $2x^2+(5+2k)x+5k<0$
$(2x+5)(x+k)<0$

1), 2)의 공통부분에 정수 x의 값이 -2만 있게 하는 k의 범위를 정하면 $-2<-k\le 3$
$\therefore -3\le k<2$

4. ①

세 점 $(0,\ 0)$, $(-\sqrt{3},\ 3)$, $(2,\ 2)$을 지나는 원의 방정식을 구하면
$x^2+y^2+ax+by+c=0$
$(0,\ 0)$을 대입하면 $c=0$
$(-\sqrt{3},\ 3)$을 대입하면 $-\sqrt{3}a+3b=-12$
$(2,\ 2)$을 대입하면 $2a+2b=-8$
연립하면 $a=0$, $b=-4$
$x^2+y^2-4y=0$, $x^2+(y-2)^2=4$
원 $x^2+(y-2)^2=4$에 $(1,\ 5)$에서 그은 두 접선의 교점을 각각 B와 C라 할 때, BC를 지나는 방정식을 구하면
$1\times x+(5-2)(y-2)=4$, $x+3y-10=0$
$\overline{BC}=2n$이라 하고 원의 중심 $(0,\ 2)$와 $x+3y-10=0$사이의 거리를 d라 하면,
$d=\dfrac{|6-10|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{10}}$
$n^2=r^2-d^2=4-\dfrac{8}{5}=\dfrac{12}{5}$
$n=\dfrac{2\sqrt{15}}{5}$
$\therefore \overline{BC}=2n=\dfrac{4\sqrt{15}}{5}$

5. 625

C점의 좌표는 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점과 $4:1$로 외분하는 점일 수 있다.
내분점은 $\left(\dfrac{6-3}{2+1},\ \dfrac{-4+7}{2+1}\right)=(1,\ 1)$
외분점은 $\left(\dfrac{12+3}{4-1},\ \dfrac{-8-7}{4-1}\right)=(5,\ -5)$
$(abcd)^2=(1\times1\times5\times-5)^2=625$

6. ③

$-1 \le (a-1)x+b$ 에서 모든 실수x에 대하여 성립하려면,
$a=1$, $-1 \le b$

$(a-1)x+b \le x^2+2x+2$ 에서 $a=1$이므로,
$0 \le x^2+2x+2-b$
모든 실수 x에 대하여 성립하려면, $\frac{D}{4} \le 0$
$b \le 1$

공통된 범위는
$a=1$, $-1 \le b \le 1$

$(a, b)=(1, -1), (1, 0), (1, 1)$

7. $\frac{1}{3}$
$(k-2)x+(2k+1)y+(2-k)=0$에서
$k(x+2y-1)+(-2x+y+2)=0$ …… ㉠
㉠이 k에 대한 항등식이어야 하므로
$x+2y-1=0$, $-2x+y+2=0$
위의 식을 연립하여 풀면 $x=1$, $y=0$이므로 직선 ㉠은 항상 점 $(1, 0)$을 지난다.
이때, 점 $(-2, 3)$과 직선 ㉠사이의 거리가 최대가 되려면 두 점 $(1, 0)$, $(-2, 3)$을 지나는 직선이 직선 ㉠과 수직이어야 하므로
$-\frac{k-2}{2k+1} \times \frac{3-0}{-2-1} = -1$, $2-k=2k+1$
$-3k=-1$
$\therefore\ k=\frac{1}{3}$

8. $-4+\sqrt{10}$

직선 $y=x+k$가 x축과 만나는 점을 P라고 하면 $\mathrm{P}(-k, 0)$
직선 AB의 방정식은 $y=-4x+16$이므로 직선 AB와 직선 $y=x+k$의 교점을 Q라고 하면 $\mathrm{Q}\left(\frac{16-k}{5}, \frac{16+4k}{5}\right)$
$\triangle \mathrm{PAQ}=\frac{2}{5}(k+4)^2$, $\triangle \mathrm{OAB}=8$이므로 $\frac{2}{5}(k+4)^2=4$
$k=-4 \pm \sqrt{10}$이고, 직선 $y=x+k$가 두 점 A, B 사이를 지나야 하므로 $-4<k<1$, 즉 $k=-4+\sqrt{10}$

9. $3x+4y=5$

$\mathrm{P}(x_1, y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2, y_2)$라고 하면 두 점 P, Q에서 원 $x^2+y^2=5$에 그은 접선의 방정식은 각각 $x_1x+y_1y=5$, $x_2x+y_2y=5$이고, 두 접선이 모두 점 $(3, 4)$를 지나므로
$3x_1+4y_1=5$, $3x_2+4y_2=5$
따라서 두 점 P, Q는 직선 $3x+4y=5$ 위의 점이므로 구하는 직선의 방정식은 $3x+4y=5$

10. (1) $\frac{1}{2}<m<2$
(2) $-1>m$ 또는 $2<m$
(3) $-1<m<\frac{1}{2}$

11. (1) $-1<m<-\frac{1}{3}$
(2) $-1>m$ 또는 $1<m$
(3) $-\frac{1}{3}<m<1$

12. 풀이 참조
$f(x)=ax^2-4x+a$라 하면 $f(x)=a\left(x-\frac{2}{a}\right)^2+a-\frac{4}{a}$
$0<\alpha<\beta<2$에서 이차방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 두 실근 α, β가 모두 0과 2 사이에 있어야 한다.
(i) 이차방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 가지므로 판별식을 D라 하면
$\frac{D}{4}=2^2-a^2>0$, $a^2-4<0$
$(a+2)(a-2)<0$ $\quad\therefore\ -2<a<2$
(ii) 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축은 $x=0$과 $x=2$ 사이에 있어야 하므로
$0<\frac{2}{a}<2$
$0<\frac{2}{a}$에서 $a>0$이므로
$\frac{2}{a}<2$에서 $2<2a$ $\quad\therefore\ a>1$
$a<0$이면 $0>2>2a$

그런데 이것을 만족시키는 실수 a는 없다.

따라서 축의 조건을 만족시키는 실수 a의 값의 범위는 $a>1$이다.

(iii) $f(0)=a$, $f(2)=4a-8+a=5a-8$이고,

$f(0)f(2)>0$이므로

$f(0)f(2)=a(5a-8)>0$

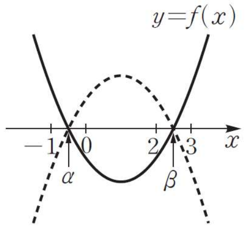
$\therefore\ a<0$ 또는 $a>\frac{8}{5}$

(i), (ii), (iii)에서 실수 a의 값의 범위는

$\frac{8}{5}<a<2$

13. $\frac{4}{5}<a<\frac{6}{5}$

$f(x)=ax^2-2x+a-2$로 놓으면 주어진 조건을 만족시키는 $y=f(x)$의 그래프는 그림과 같다.



$f(x)=0$의 한 근이 -1과 0 사이에 있을 조건은

$f(-1)f(0)<0$에서

$(a+2+a-2)(a-2)<0,\ 2a(a-2)<0$

$\therefore\ 0<a<2$ …… ㉠

…2점

$f(x)=0$의 다른 한 근이 2와 3 사이에 있을 조건은

$f(2)f(3)<0$에서

$(4a-4+a-2)(9a-6+a-2)<0$

$2(5a-6)(5a-4)<0$

$\therefore\ \frac{4}{5}<a<\frac{6}{5}$ …… ㉡

…2점

㉠, ㉡의 공통부분을 구하면 $\frac{4}{5}<a<\frac{6}{5}$

…1점

14. 풀이 참조

|풀이| 원 $x^2+y^2=4$ 위를 움직이는 점 A와 직선 $y=x-4\sqrt{2}$ 사이의 거리는 삼각형 ABC의 높이이므로 원의 중심인 점 $(0,\ 0)$과 직선 $x-y-4\sqrt{2}=0$ 사이의 거리는 $\frac{|-4\sqrt{2}|}{\sqrt{2}}=4$

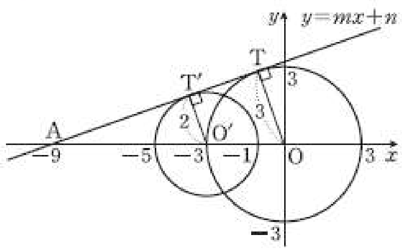
원의 반지름의 길이는 2이므로 정삼각형이 되는 삼각형 ABC의 넓이가 최소일 때의 삼각형의 높이는 $4-2=2$이고 이때의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\frac{4}{\sqrt{3}}\times2=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

삼각형 ABC의 넓이가 최대일 때의 삼각형의 높이는 $4+2=6$이고 이때의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\frac{12}{\sqrt{3}}\times6=12\sqrt{3}$

답 최댓값: $12\sqrt{3}$, 최솟값: $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

15. 풀이 참조

해결과정 두 원의 중심을 O, O′이라 할 때, 주어진 직선과 두 원 O, O′이 만나는 점을 각각 T, T′이라 하고 x축과 만나는 점을 A라 하면 삼각형 AO′T′과 삼각형 AOT는 닮음이고, 닮음비는 2 : 3이다. ▶ 10%



따라서 점 A의 좌표는 $(-9,\ 0)$이므로

$-9m+n=0,\quad n=9m$ ▶ 20%

원점과 직선 $mx-y+n=0$ 사이의 거리는 3이므로

$\frac{|n|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=3,\quad \frac{|9m|}{\sqrt{m^2+1}}=3,\quad m^2=\frac{1}{8}$

▶ 50%

답구하기 따라서 구하는 값은

$32mn=32\times9m^2=36$ ▶ 20%

16. ④

$\sqrt{x^2+y^2}=k$라 두면
$x^2+y^2=k^2$이므로 중심이 원점이고, 반지름이 k인 원

'$(x-6)^2+(y-8)^2=10$을 만족하는 실수 x, y에 대하여'
라는 조건을 만족시키기 위해서는
$x^2+y^2=k^2$이 $(x-6)^2+(y-8)^2=10$과의 교점이 존재해야 한다.

$x^2+y^2=k^2$이 $(x-6)^2+(y-8)^2=10$과 만나는 원 중에서
반지름이 가장 짧은 원은 $(0,0)$에서 $(6,8)$까지의
거리10에서 반지름 $\sqrt{10}$을 뺀,
$10-\sqrt{10}$

반지름이 가장 긴 원은 $(0,0)$에서 $(6,8)$까지의 거리10에서
반지름 $\sqrt{10}$을 더한,
$10+\sqrt{10}$

$10-\sqrt{10}\le k\le 10+\sqrt{10}$이므로 만족하는 정수는
$7,8,9,\cdots,13$

여기서 주의해야 할 것은 반지름 길이 하나당 대칭적으로
두 개의 (x,y)에 대해서 만족한다는 점을 명심하자.

그래서 총 만족하는 (x,y)는 14개

17. ①

$\mathrm{B}(7,\ 0)$을 직선$x+y=4$에 대칭하면,
$B'(4,-3)$이다. $x+y=4$에서 $x=7$을 대입하면
$y=-3$이라는 것을 알 수 있고, $y=0$을 대입하면
$x=4$라는 걸 쉽게 알 수 있다. 혹시 이 방법을 모르면, 꼭 물어보도록 하자.

$\mathrm{A}(2,\ 5)$, $\mathrm{B}'(4,\ -3)$을 이은 직선이 최단 거리
$y=-4x+13$

이 직선과 $x+y=4$와의 교점이 $P(3,1)$

18. ②

중심이 $y=2x$위에 있으므로
$(x-a)^2+(y-2a)^2=r^2 \quad \cdots$㉠

점 $(1,\ 6)$을 지나므로
$(1-a)^2+(6-2a)^2=r^2$

이 원 위를 움직이는 점 A와 직선 $x+2y+5=0$ 사이의
거리의 최댓값은

직선 $x+2y+5=0$에서 중심$(a,2a)$까지의 거리에서 반지름
r을 더하면 되므로,

직선 $x+2y+5=0$에서 중심$(a,2a)$까지의 거리
$\dfrac{|3a+5|}{\sqrt{5}}=\dfrac{3a+5}{\sqrt{5}}$ ($\because a$는 양수)

따라서
$\dfrac{3a+5}{\sqrt{5}}+r=4\sqrt{5}$

㉠의 r에 대입하면, 생각보다 계산이 간편하다.
$a=\dfrac{10}{3}$, $r=\sqrt{5}$

19. 최댓값 : 8, 최솟값 : -12

원 $x^2+y^2=36$ 위에 $P(a,\ b)$가 있으므로,
$a^2+b^2=36 \ \cdots$㉠

삼각형 ABP의 무게중심의 좌표를 $\mathrm{G}(p,\ q)$이므로
$\mathrm{A}(-6,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ -6)$, $P(a,\ b)$
$p=\dfrac{a-6}{3}, q=\dfrac{b-6}{3}$
$a=3p+6, b=3q+6$

㉠에 대입하면,
$a^2+b^2=36$, $(3p+6)^2+(3q+6)^2=36$,
$9(p+2)^2+9(q+2)^2=36$,
$(p+2)^2+(q+2)^2=4$

$4p-3q=k$라 두면, $q=\dfrac{4}{3}p-\dfrac{k}{3}$인 직선의 방정식이다.
원 $(p+2)^2+(q+2)^2=4$을 만족하려면 이 원과의 교점이
존재해야 한다.

k의 최댓값과 최솟값은 $q=\dfrac{4}{3}p-\dfrac{k}{3}$의 y절편의 최솟값과
최댓값이므로, $(p+2)^2+(q+2)^2=4$과 접할 때를 말한다.

$4p-3q-k=0$에서 원의 중심$(-2,-2)$까지의 거리와

반지름2와 같다.

$$\frac{|-8+6-k|}{\sqrt{25}}=\frac{|2+k|}{5}=2$$

$k=8,\ -12$
최댓값 : 8, 최솟값 : -12

20. ②

$4x-y+1=0$, $x+y-6=0$의 교점은 $(1,5)$이다.

$(1,5)$를 지나는 직선은 무수히 많다.
그 중, 원점부터 거리가 가장 먼 직선은
원점과 $(1,5)$를 이은 직선에 수직인 직선이다.

따라서 가장 거리가 먼 직선에서 원점까지의 거리는
원점과 $(1,5)$까지의 거리를 의미한다.
$\sqrt{26}$

거리라는 것은 수직거리를 의미한다.
$(1,5)$를 지나면서 조금이라도
원점과 $(1,5)$를 이은 직선에 수직에서 벗어나 버리면
수직을 내렸을 때, 더 짧아질 수밖에 없다.

21. ③

교점 $\mathrm{A},\ \mathrm{B}$를 지나는 직선은 두 원의 공통현의
방정식이므로 두 원의 차를 구하면 $3x-4y+5=0$이다.
주어진 원의 중심이 $(2,\ -1)$이므로 중심에서 직선까지
거리를 구하면 3이다.

ⅰ) $3<r,\quad f(r)=2$
ⅱ) $3=r,\quad f(r)=1$
ⅲ) $3>r,\quad f(r)=0$

ㄱ. $\sqrt{10}>3$이므로 맞다.
ㄴ. 선분 AB의 길이는 6이므로 성립하는 자연수는 없다.
ㄷ. $f(r_1)+f(r_2)=1$이려면 하나는 반지름이 3이여야 하고 다른 하나는 반지름이 3보다 작아야 한다. 따라서 $|r_1-r_2|$의 값은 $|r_1|=3,\quad |r_2|<3$ or $|r_2|=3,\quad |r_1|<3$

$|r_1-r_2|$의 최댓값은 $r_1=3,\ r_2=-2$ or $r_2=3,\ r_1=-2$
5이고
$|r_1-r_2|$의 최솟값은 $r_1=3,\ r_2=2$ or $r_2=3,\ r_1=2$ 1이다
따라서 최댓값과 최솟값의 합은 6

22. $-1\leq k<\frac{\sqrt{2}}{2}$

인수분해하면,
$(x+1)(x^2+2kx+2k^2-1)=0$

$x^2+2kx+2k^2-1=0$에서 적어도 하나의 양수근을 가져야 한다.

대개 반대경우를 빼주는데 더 적절하다.
$D\geq 0$의 범위를 구하고,
ⅰ) 둘 다 음수 근
ⅱ) 한 근은 음수, 한 근은 0
ⅲ) 0으로 중근

세 가지 경우를 빼주면 된다.
음수로 중근을 갖는 경우는 ⅰ)에 포함되므로 굳이 빼줄 필요 없다.

ⅰ) $D\geq 0$, $f(0)>0$, 축<0
ⅱ) $D\geq 0$, $f(0)=0$, 축<0
ⅲ) $D=0, f(0)=0,$ 축$=0$

또한 ⅰ)ⅱ)를 합쳐서
ⅳ) $D\geq 0$, $f(0)\geq 0$, 축<0으로 구해도 된다.

$D\geq 0$범위는 $-1\leq k\leq 1$이고 ⅳ)의 범위는
$\frac{\sqrt{2}}{2}\leq k\leq 1$이고, ⅲ)의 공통된 범위는 존재하지 않으므로,
빼주면,

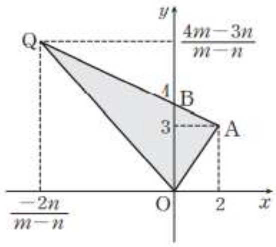
$$-1\leq k<\frac{\sqrt{2}}{2}$$

23. 풀이 참조

두 점 A(2, 3), B(0, 4)에 대하여 선분 AB를 $m:n$으로 외분하는 점 Q의 좌표는

$$Q\left(\frac{-2n}{m-n},\ \frac{4m-3n}{m-n}\right)$$

이때, $m>n>0$이므로 점 Q는 다음 그림과 같이 제2사분면 위에 있다.



삼각형 OAB의 밑변을 $\overline{OB}$로 정하면 높이는 점 A의 x좌표와 같으므로

$\triangle OAB=\frac{1}{2}\times4\times2=4$

$\therefore\ \triangle OBQ=\triangle OAQ-\triangle OAB$

$\qquad=16-4=12$

$\triangle OBQ$의 밑변을 $\overline{OB}$로 정하면 높이는 점 Q의 x좌표의 절댓값과 같으므로

$12=\frac{1}{2}\times4\times\left(-\frac{-2n}{m-n}\right)$

$6m-6n=2n,\ 6m=8n \qquad \therefore\ \frac{n}{m}=\frac{3}{4}$

24. ④

원 $x^2+y^2=15$와 직선 $ax+by-6=0$의 교점을 지나는 원 중에서 그 넓이가 최소인 원의 넓이는 $9\pi=3^2\times\pi$이므로 이 원의 지름의 길이는 6이고, 이것은 원 $x^2+y^2=15$의 현의 길이이다.

따라서 원 $x^2+y^2=15$의 중심 $(0,\ 0)$과 직선 $ax+by-6=0$사이의 거리는

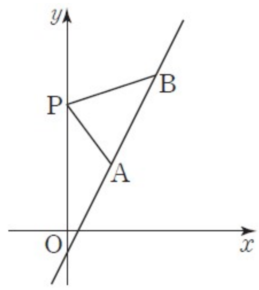
$\frac{|-6|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{(\sqrt{15})^2-3^2}$에서 $6=\sqrt{6(a^2+b^2)}$

위의 식의 양변을 제곱하면

$6(a^2+b^2)=36 \qquad \therefore\ a^2+b^2=6$

25. $(0,\ -1)$

y축 위를 움직이는 점 P에 대하여 세 점 A, B, P가 삼각형을 이룰 때,



$\overline{AP}<\overline{AB}+\overline{BP}$이므로

$\overline{AP}-\overline{BP}<\overline{AB}$

한편 $\overline{AP}+\overline{AB}>\overline{BP}$이므로

$\overline{AP}-\overline{BP}>-\overline{AB}$

즉, $-\overline{AB}<\overline{AP}-\overline{BP}<\overline{AB}$에서

$|\overline{AP}-\overline{BP}|<\overline{AB}$ …… ㉠

직선 AB가 y축과 만나는 점을 P′이라 하면 점 P가 점 P′과 일치할 때

$|\overline{AP}-\overline{BP}|=|\overline{AP'}-\overline{BP'}|=\overline{AB}$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $|\overline{AP}-\overline{BP}|\le\overline{AB}$이므로 $|\overline{AP}-\overline{BP}|$의 최댓값은 $\overline{AB}$이다.

두 점 $A(2,\ 3)$, $B(4,\ 7)$을 지나는 직선의 방정식은

$y-3=\frac{7-3}{4-2}(x-2)$

따라서 $y=2x-1$이므로 $P(0,\ -1)$이다.

26. ④

점 $(x_n,\ y_n)$에서의 접선의 방정식은

$x_nx+y_ny=1$ …… ㉠

점 $(x_n,\ y_n)$은 원 위의 점이므로

${x_n}^2+{y_n}^2=1$ …… ㉡

직선 ㉠이 점 $(n,\ 0)$을 지나므로

$x_nn=1,\ x_n=\frac{1}{n}$ …… ㉢

㉢을 ㉡에 대입하면

${y_n}^2=1-{x_n}^2=1-\frac{1}{n^2}$

$=\frac{n^2-1}{n^2}=\frac{n-1}{n}\times\frac{n+1}{n}$

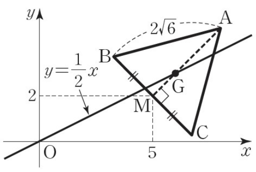
따라서

$(y_2\times y_3\times\cdots\times y_8)^2$

$=\left(\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\right)\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\right)\times\cdots\times\left(\frac{7}{8}\times\frac{9}{8}\right)=\frac{9}{16}$

이므로 $\quad y_2\times y_3\times\cdots\times y_8=\frac{3}{4}$

27. 9



한 변의 길이가 $2\sqrt{6}$인 정삼각형 ABC의 높이는

$$\overline{AM}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times2\sqrt{6}=3\sqrt{2}$$

변 BC의 중점 M과 정삼각형 ABC의 무게중심 G에 대하여

$$\overline{GM}=\frac{1}{3}\overline{AM}$$
$$=\frac{1}{3}\times3\sqrt{2}$$
$$=\sqrt{2}$$

한편, 정삼각형 ABC의 무게중심 G가 직선 $y=\frac{1}{2}x$ 위에 있으므로 $G(2a,\ a)$라 하면

$$\overline{GM}=\sqrt{(2a-5)^2+(a-2)^2}=\sqrt{2}$$
$$(2a-5)^2+(a-2)^2=2,\ 5a^2-24a+27=0$$
$$(a-3)(5a-9)=0 \qquad \therefore\ a=3 \text{ 또는 } a=\frac{9}{5}$$

그런데 점 G의 y좌표가 2 이상이므로

$a=3$ $\qquad\therefore\ G(6,\ 3)$

이때, 정삼각형 ABC의 세 꼭짓점 A, B, C의 좌표를 각각 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$, $(x_3,\ y_3)$이라 하면

$$\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=6,\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}=3$$

따라서 구하는 세 꼭짓점 A, B, C의 y좌표의 합은

$$y_1+y_2+y_3=3\times3=9$$

28. 24

그림을 그리고 P에서 원의 중심까지 이으면, 피타고라스 정리를 사용할 수 있어. 원의 중심까지의 거리가 $\frac{24}{5}$라는 것을 알 수 있다.

기울기는 원점과 $(3,-4)$를 이은 직선에 수직이므로 $\frac{3}{4}$

$y=\frac{3}{4}x+k$에서 $(0,0)$까지의 거리가 $\frac{24}{5}$

따라서 $k=\pm6$

그림으로 보면, $k=-6$

$y=\frac{3}{4}x-6$이므로 x절편: 8, y절편: 6

넓이는 24

29. 풀이 참조

$x^2-a^2x\geq0$에서 $x(x-a^2)\geq0$

$\therefore\ x\leq0$ 또는 $x\geq a^2$ ($\because\ 0<a<\sqrt{2}$) ……㉠

$x^2-4ax+4a^2-1<0$에서

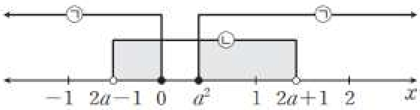
$\{x-(2a-1)\}\{x-(2a+1)\}<0$

$\therefore\ 2a-1<x<2a+1$ ……㉡

(i) $0<a<\frac{1}{2}$일 때,

$-1<2a-1<0$, $0<a^2<\frac{1}{4}$, $1<2a+1<2$이므로

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



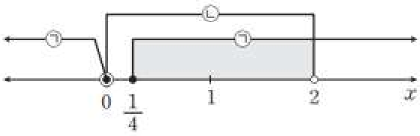
연립부등식의 해는 $2a-1<x\leq0$ 또는 $a^2\leq x<2a+1$이고, 정수 x는 0, 1의 2개 존재한다.

(ii) $a=\frac{1}{2}$일 때,

㉠에서 $x\leq0$ 또는 $x\geq\frac{1}{4}$

㉡에서 $0<x<2$

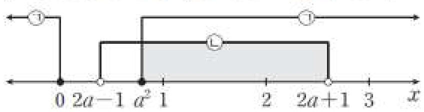
㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



연립부등식의 해는 $\frac{1}{4}\leq x<2$이므로 정수 x는 1의 1개 존재한다.

(iii) $\frac{1}{2}<a<1$일 때,

$0<2a-1<1$, $\frac{1}{4}<a^2<1$, $2<2a+1<3$이므로 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



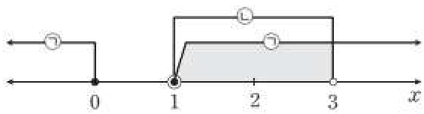
연립부등식의 해는 $a^2\leq x<2a+1$이고, 정수 x는 1, 2의 2개 존재한다.

(iv) $a=1$일 때,

㉠에서 $x\leq0$ 또는 $x\geq1$

㉡에서 $1<x<3$

㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.

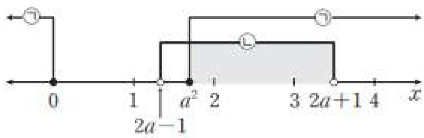


연립부등식의 해는 $1<x<3$이므로 정수 x는 2로 1개 존재한다.

(ⅴ) $1<a<\sqrt{2}$일 때,

$1<2a-1<2\sqrt{2}-1<2$, $1<a^2<2$,

$3<2a+1<1+2\sqrt{2}<4$이므로 ㉠, ㉡을 수직선 위에 나타내면 다음 그림과 같다.



연립부등식의 해는 $a^2 \leq x<2a+1$이고, 정수 x는 2, 3의 2개 존재한다.

(ⅰ)~(ⅴ)에서 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 개수가 1이 되는 실수 a의 값은 $a=\frac{1}{2}$ 또는 $a=1$

따라서 모든 실수 a의 값의 합은 $\frac{3}{2}$이다.